$\left\{\begin{array}{l}\frac{\infty}{\infty} \\ \star\ \frac{0}{0}\end{array}\right. \leftarrow \boxed{0\cdot\infty} \xleftarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l}1^{\infty}\ \star \\ 0^{0} \\ \infty^{0}\end{array}\right.$

$\infty-\infty \to \frac{0}{0}$

③ $0\cdot\infty$型

$\nearrow$ "$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$" $\to$ "$\frac{0}{0}$"　"踢母"

$\searrow$ "$\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$" $\to$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{洛}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

【例 15】 $\lim\limits_{x\to0} x\cot 3x=$ $\underline{\quad 1/3 \quad}$.

$\cot x=\frac{1}{\tan x}$

✗ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cot 3x}{\frac{1}{x}}\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-3\csc^2 3x}{-\frac{1}{x^2}}$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan 3x}=\frac{1}{3}$

$\sim 3x$

④ $\infty-\infty$型

- 有分母 —— 通分 $\left(\frac{0}{0}\right)$
- 有根号 —— 有理化 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
- 既无分母，也无根号 —— 令 $t=\frac{1}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

【例 16】 (2005 年考研题)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

不可 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

$x \quad x$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$ $\sim x$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}$ ✓

【例 17】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+2\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\frac{3}{2}$

$\frac{2}{\sqrt{n}}\to 0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$

【例 18】 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-2x\right]$.

原式 $\overset{令t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+2t)-\frac{2}{t}\right]$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\boxed{\ln(1+2t)-2t}}{t^2}$ $\sim -\frac{1}{2}(2t)^2$

$\ln(1+2t)=2t-\frac{1}{2}(2t)^2+o(t^2)$

$=-2.$

⑤ 1^∞、0^0、∞^0 型

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}$$

$$\lim_{x\to\cdot} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\cdot} g(x)\ln f(x)}\quad f(x)\to 1\quad (0\cdot\infty)$$

$$\overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to\cdot} g(x)[f(x)-1]}$$

$\ln\alpha \sim \alpha-1$ $(\alpha\to 1)$

(1-1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$ $\cancel{x}$ x $\cancel{=}1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\ln(1+x)\sim x$

解 $\overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\ln\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}$ $\to 1$, $e^x-1\sim x$

$$\ln\frac{\alpha}{\beta}=\ln\alpha-\ln\beta,\qquad \frac{e^\alpha}{e^\beta}=e^{\alpha-\beta}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$\ln(1+x)-x\sim -\frac{1}{2}x^2$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^3\sin\frac{1}{x}}}{e^{x^2}}$ $\cancel{x}$ $\frac{1}{x}$ $\cancel{=}1$ $=$ $e^{-\frac{1}{6}}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^3\sin\frac{1}{x}-x^2}$

$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)}$$

$\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sim -\frac{1}{6}\frac{1}{x^3}$

$$= e^{-\frac{1}{6}}$$

【例 20】（2010 年考研题）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

若局部出现幂指函数，可局部取对数

$$x^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\frac{\ln x}{x}\ (x\to+\infty) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}\overset{0^0}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)} \qquad \cancel{\frac{\ln x}{x}-1}$$

$$\overset{0\cdot\infty}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{洛}{=}}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=e^{-1}$$

$$\boxed{\alpha^{\beta}-1\sim\beta\ln\alpha}\ (\beta\ln\alpha\to0)$$

$$\boxed{\alpha^{\beta}-1\sim\beta(\alpha-1)}\ (\beta\ln\alpha\to0,\ \alpha\to1)$$

（25-1）$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\,\ln(1-x)}=$ $\underline{\ -1\ }$ 5-1

$x^x-1\sim x\ln x$，$\ln(1-x)\sim -x$，$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$

（24-1）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$ $\underline{\ 6\ }$. 5-1

$(1+ax^2)^{\sin x}-1\sim\sin x\cdot ax^2\sim ax^3$

☆ 求函数极限常见错误：

1° 不看趋向

2° 局部求，不能等价替换时换（用运算法则拆）

3° 泰勒展开阶数不够（尽量往高了展）

4° 幂指函数漏掉 e（每步都带着 e）

2. 两种典型的非初等函数

(1) 无限和式

法一：夹逼准则

$< \quad <$
$< \quad \le$
$\le \quad <$

$$\begin{cases} y_n \le x_n \le z_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$$

【例 22】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{n}{n^2+1}}+\overset{\to 0}{\frac{n}{n^2+2}}+\cdots+\overset{\to 0}{\frac{n}{n^2+n}}\right)$. $\cancel{0}$ $0 \cdot \infty$

极缔

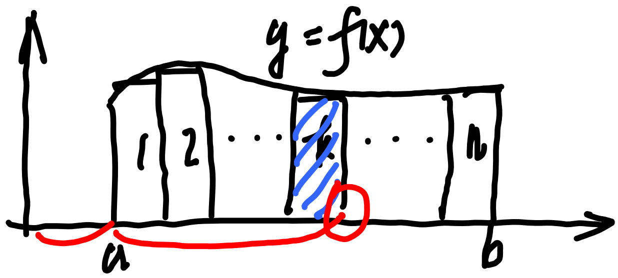
$$\begin{cases} \frac{n^2}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n^2}{n^2+1} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{原式} = 1$$

【例】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} = \underline{\quad a_m \quad}$. $(0<a_1<a_2<\cdots<a_m)$

$$a_m = \sqrt[n]{a_m^n} \le \sqrt[n]{a_1^n+\cancel{a_2^n+\cdots}+a_m^n} \le \sqrt[n]{m a_m^n} = a_m \cdot m^{\frac{1}{n}}$$

$\downarrow$
1

法三：定积分定义（极限）



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n} \triangleq \int_a^b f(x)\,dx$$

当 $a=0, b=1$ 时，$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx}$　$\frac{k}{n}\to x$

★ 当把 $\frac{1}{n}$ 提出后，“$\frac{k}{n}$”以整体出现，无论几个n项和，则可用定积分定义求n项和极限.

【例 23】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2+n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\boxed{\frac{k}{n}}\right)^2}$　$\to x$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$=\left[\arctan x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

【例 24】（1998 年考研题）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi \le \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k}{n}\pi}{n+\frac{1}{k}} < \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi \qquad 0<\frac{1}{k}\le 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\boxed{\frac{k}{n}}_{\to x}\pi=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\dfrac{1}{\pi}\left[-\cos\pi x\right]_0^1=\dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi}_{\to\frac{2}{\pi}}=\frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow$ 原式 $=\dfrac{2}{\pi}$. #