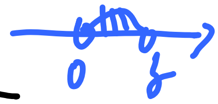
3. 判断间断点类型

初等函数的间断点只可能是无定义点

分段函数的间断点既可能是无定义点，又可能是分段点

☆ x_0是$f(x)$间断点 ⇒ $f(x)$在x_0去心邻域内有定义



如 $f(x)=\ln x \ (x=0)$ ✗

$f(x_0^-), f(x_0^+)$都∃ 第一类

- $f(x_0^-)=f(x_0^+)$ 可去

- $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$ 跳跃

$f(x_0^-), f(x_0^+)$至少一个不∃ 第二类

- $f(x_0^-), f(x_0^+)$至少一个为∞(或$+\infty, -\infty$) 无穷

- $f(x)$在$x\to x_0$时出现振荡现象 振荡 如 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $(x=0)$

【例 35】 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(x-1)t^2+(x-1)t}{|x-1|t^2+(|x|-1)t}\cdot\frac{x}{|\sin x|}$的跳跃间断点有(B)

(A)0 个. (B)1 个. (C)2 个. (D)无穷多个.

☆ 用极限定义函数 ⇒ 先求$f(x)$表达式

$$f(x)=\frac{x(x-1)}{|\sin x|(|x|-1)}$$

考察 $x=1,-1,k\pi\ (k\in Z)$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\sin x\cancel{(x-1)}}=\dfrac{1}{\sin1}\Rightarrow x=1$ 是可去 ~

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x-1)}{\sin x(x+1)}=\infty\Rightarrow x=-1$ 是无穷 ~

当 $k\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty\Rightarrow x=k\pi\ (k\neq0)$ 是无穷 ~

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\sin x\cancel{(x-1)}}=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{\sin x}\cdot(x+1)}=-1\end{cases}\Rightarrow x=0\text{ 是跳跃 ~}$$

【例 36】 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{x}{x-1}}$，则 $f(x)$ 有（ D ）

$\dfrac{x}{x-1}\to\infty$

"arctan∞"

"e^{∞}"

(A) 可去间断点 $x=0$.　　(B) 可去间断点 $x=1$.

(C) 跳跃间断点 $x=0$.　　(D) 跳跃间断点 $x=1$.

考察 $x=0,1$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty\Rightarrow x=0$ 是无穷 ~

$$\begin{cases}\text{当 }x\to1^+\text{ 时，}x-1\to0^+\Rightarrow\dfrac{x}{x-1}\to+\infty\Rightarrow\arctan\dfrac{x}{x-1}\to\dfrac{\pi}{2}\\ \qquad\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{2}{\pi}\\ \text{当 }x\to1^-\text{ 时，}x-1\to0^-\Rightarrow\dfrac{x}{x-1}\to-\infty\Rightarrow\arctan\dfrac{x}{x-1}\to-\dfrac{\pi}{2}\\ \qquad\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\dfrac{2}{\pi}\end{cases}$$

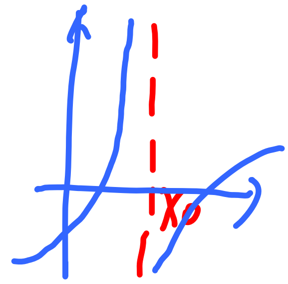
$\Rightarrow x=1$ 是跳跃 ~.

4. 求渐近线

无定义点

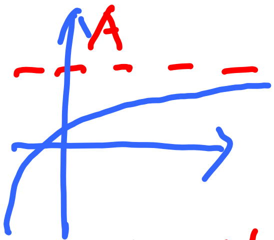
① $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ (或 $+\infty$, $-\infty$) $\Rightarrow x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 铅直~
$(x\to x_0^-)$

如 $y=\ln x$ $(x=0)$

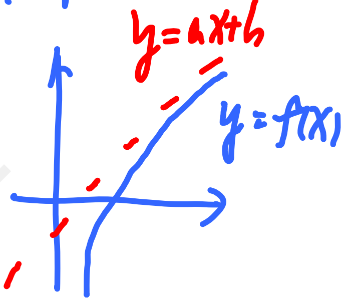


② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Rightarrow y=A$ 是 $y=f(x)$ 水平~
$(x\to-\infty)$

如 $y=e^x$ $(y=0)$, $y=\arctan x$ $\left(y=\pm\frac{\pi}{2}\right)$ ✓



③ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0 \quad (x\to-\infty) \\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b \quad (x\to-\infty) \end{cases} \Rightarrow y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 斜~

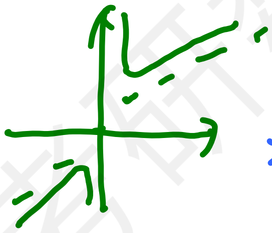


$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$ ✓

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-a-\dfrac{b}{x}\right]=0$, $\dfrac{b}{x}\to 0$

如 $y=\sqrt{x^2-1}$ $(y=\pm x)$ ✓

$y=x+\frac{1}{x}$ $(y=x)$



★ 在 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 每个方向上，水平、斜~总共至多1条

（17-2）曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________.

$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$(\alpha(x)\to 0)$

法一：$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1 \quad \left(\arcsin\dfrac{2}{x}\to 0\right) \\ \lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\dfrac{2}{x}=2 \quad \left(\arcsin\dfrac{2}{x}\sim\dfrac{2}{x}\right) \end{cases} \Rightarrow y=x+2$ ✓

法二：★ $f(x)=ax+b+\alpha(x)$ （当 $x\to\infty$ 时，$\alpha(x)\to 0$）

$\Rightarrow y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 斜~

① 提出 x
② 泰勒展开

$y=x\left[1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{x}\right)^3+\cdots\right]=x+2+\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x^2}+\cdots$ $\left(\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{x^2}+\cdots\to 0\right)$

【例 37】（2007 年考研题）曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为（ D ）

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

$\frac{1}{x}\to 0$　　$e^x \to +\infty$　　"e^{∞}"

① 铅直

② 水平+斜

$\lim\limits_{x\to 0} y=\infty \Rightarrow x=0$ 是铅直～

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$

$\Rightarrow y=0$ 是水平～.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]$　　$x=\ln e^x$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=0$　　$\frac{1+e^x}{e^x}\to 1$

$\Rightarrow y=x$ 是斜～. #

三、已知极限问题

- 已知极限，求另一极限 ✓
- 已知极限求参数
  - 间断点类型背景
  - 无穷小比较背景
  - 连续性背景

【例 40】 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right]}{5^x-1}=3$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ________.

$5^x-1\to0$

$\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)\quad(\alpha(x)\to0)$

由题意，$\lim\limits_{x\to0}\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right]=0\Rightarrow\dfrac{f(x)}{\sin2x}\to0\ (x\to0)$

$\Rightarrow\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin2x}\right]\sim\dfrac{f(x)}{\sin2x}\sim\dfrac{f(x)}{2x}\ (x\to0)$

$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a\quad(x\to0)$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x(5^x-1)}=3$，$5^x-1\sim x\ln5$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x(5^x-1)}\cdot\dfrac{2x(5^x-1)}{x^2}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x(5^x-1)}{x^2}$ （$\dfrac{f(x)}{2x(5^x-1)}\to3$）

洛 $=3\lim\limits_{x\to0}2\cdot5^x\ln5=6\ln5$. ✓

【例 42】 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$，则 $a=$ __0__，$b=$ __e__.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty\Rightarrow a=0$ （$e^x-b\to1-b$）

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 存在 $\Rightarrow b=e$ （$x(x-1)\to0$）

☆ ① $\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}\exists$, $\lim\limits_{x\to\cdot} g(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=0$ ✓

② $\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\cdot} g(x)=0$ ✓

③ $\lim\limits_{x\to\cdot}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)\exists \Rightarrow \lim\limits_{x\to\cdot} g(x)=0$

【例 43】 (2011 年考研题)已知当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则(C)

(A) $k=1,c=4$.　　(B) $k=1,c=-4$.

(C) $k=3,c=4$. ✓　　(D) $k=3,c=-4$.

$$f(x)=3\left[\cancel{x}-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-\left[\cancel{3x}-\frac{1}{6}(3x)^3+o(x^3)\right]$$

$$=4x^3+o(x^3)\sim 4x^3 \quad (x\to 0)$$

[注]

① ②
$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin 3x-3\sin x}{ck(k-1)x^{k-2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{27\cos 3x-3\cos x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$ 存在吗?

=1

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{27\cos 3x-3\cos x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=1$ 得 $k=3,c=4$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{12x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{9\sin 3x-3\sin x}{24x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{27\cos 3x-3\cos x}{24}=1.$$

∃ ∃ ∃ ∃

【例 44】 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x \arcsin at\,dt}{x^2}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1-bx^2)}, & x>0\end{cases}$$

$\sim -bx^2$

在 $x=0$ 处连续，求 a,b 的值.

[分析] ☆ 求参数的基本策略是列方程.

$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0) \underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{x\to0} f(x)\ \exists \Leftrightarrow f(0^-)=f(0^+)$$

[解] $$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^x \arcsin at\,dt}{x^2} \overset{洛}{=} \lim_{x\to0^-}\frac{\arcsin ax}{2x}=\frac{a}{2}.$$

$\sim ax$

"$f(b)-f(a)$"

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{\boxed{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}}}{-bx^3}$$

$f(t)=\sqrt{1+t}$

$$\overset{拉格}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}(x-\sin x)}{-bx^3}\quad(\xi \text{介于 } \underset{\to0^+}{x} \text{ 与 } \underset{\to0^+}{\sin x} \text{ 之间})$$

$$=\lim_{\xi\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{-bx^3}=-\frac{1}{12b}$$

$\sim \frac{1}{6}x^3$

由 $f(0^-)=f(0^+)=f(0) \Rightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}=1\\ -\frac{1}{12b}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-\frac{1}{12}.\end{cases}$ #