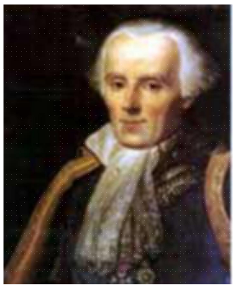
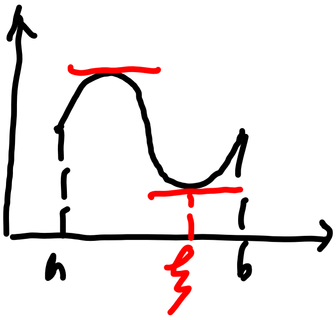
1. 微分中值定理

(1) 罗尔 Th.

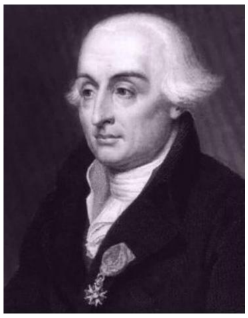


$$f(x)\begin{cases} ① \text{在}[a,b]\text{上连续} \\ ② \text{在}(a,b)\text{内可导} \\ ③ \underline{f(a)=f(b)} \ ☆ \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.



(2) 拉格朗日中值 Th.



$$f(x)\begin{cases} ① \text{在}[a,b]\text{上连续} \\ ② \text{在}(a,b)\text{内可导} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

或 $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(3) 柯西中值Th.

$f(x),g(x)\begin{cases}①在[a,b]上连续\\②在(a,b)内可导\\③g'(x)\neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$,使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\boxed{\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\xi}$ $\quad\begin{cases}x=g(t)\\y=f(t)\end{cases}$

2. 泰勒公式

x_0附近 拟合

设$f(x)$具有$n+1$阶导数,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

$o[(x-x_0)^n]$

(ξ介于x_0与x之间)

取$x_0=0$,则称为麦克劳林公式

[注]

爷爷 $\qquad$ 爸爸 $\qquad$ 儿子

$f'(\xi)=0 \underset{f(a)=f(b)}{\overset{推广}{\rightleftarrows}} f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \underset{g(x)=x}{\overset{推广}{\rightleftarrows}} \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

推广 ↓ ↑ $n=0$, $x=b$, $x_0=a$

孙儿

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

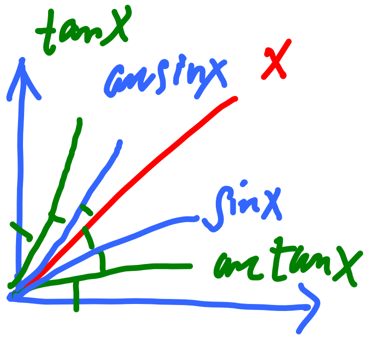
★必须记住的泰勒展开式:

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\qquad (e^x)^{(n)}\big|_{x=0}=1$

② $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

求导

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$



$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\cdots$

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\cdots$

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$

$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-x^n)}{1-x}$ $\quad x^n\to 0$ $\qquad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-x}$

③ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(|x|<1)$ $\qquad -x$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\quad(|x|<1)$

积分

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\le 1)$

$(1+x)^\mu=C_\mu^0x^0+C_\mu^1x+C_\mu^2x^2+\cdots=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+\cdots$

★ $f(x)\xrightarrow{展开}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $\qquad$ 由 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Rightarrow\boxed{f^{(n)}(0)=a_n\cdot n!}$

【例 4】(2007 年考研题)设函数 $y=\frac{1}{2x+3}$,则 $y^{(n)}(0)=$______.

$y=\frac{1}{3+2x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{3^{n+1}}x^n$

$a_n=\frac{(-1)^n2^n}{3^{n+1}}$ $\qquad$ 故 $y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n2^n}{3^{n+1}}n!$

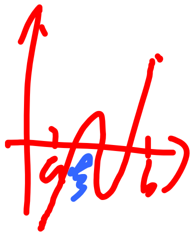
4.设函数 $y=x^2\sin 2x$，则 $y^{(5)}(0)=$ ____________.

$$y=x^2\left[2x-\frac{1}{6}(2x)^3+\cdots\right]=2x^3-\frac{4}{3}x^5+\cdots$$

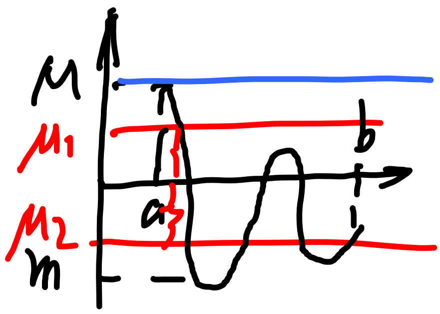
$a_5=-\frac{4}{3}$ 故 $y^{(5)}(0)=a_5\cdot 5!=-\frac{4}{\cancel{3}}\times5\times4\times\cancel{3}\times2=-160$

3.闭区间上连续函数的性质

	条件	结论
最值Th.	$f(x)$在$[a,b]$上连续	$m\le f(x)\le M$
介值Th.	$f(x)$在$[a,b]$上连续，$m\le f(x)\le M$	$\forall\mu\in[m,M]$，$\exists\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=\mu$
零点Th.	$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$	$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$



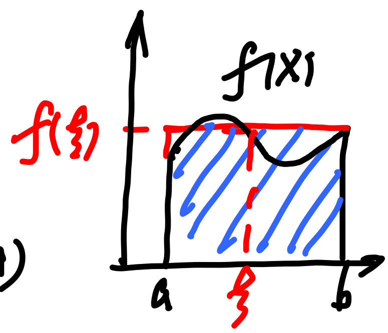
☆ 介于最大值和最小值之间的任何值一定能被连续函数取到



4.积分中值定理

$f(x)$在$[a,b]$上连续

$\Rightarrow\exists\xi\in[a,b]$，使$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$



$\bar{f}=\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$ 称为$f(x)$在$[a,b]$上的平均值.

$[a,b]$ $m\le f(x)\le M$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b m\,dx}_{m(b-a)} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \underbrace{\int_a^b M\,dx}_{M(b-a)}$$

$$\Rightarrow m \le \boxed{\overbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}^{=\mu}} \le M$$

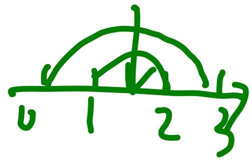
介值

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$，使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

问 记 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，根据拉格朗日中值Th.，$\exists \xi\in(a,b)$，

使 $\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi'(\xi)(b-a)$，　$\Phi'(x)=f(x)$

即 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.



$\xi\in(1,2)\subset[0,3]$

- 含一个中值　罗尔　分析综合法
- 含两个中值
  - 两个中值无要求
  - 两个中值不同

【例 35】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(ab>0)$，在 (a,b) 内可导，求证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

$=F'(\xi)$　　找 $F(x)$

法一(罗尔)：$\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}}{\xi^2}=0$

$$F(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}\cdot\frac{1}{x}\qquad F(a)=F(b)$$

法二(柯西)：
$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$F(x)=\frac{f(x)}{x}$ ✓　$G(x)=\frac{1}{x}$ ✓

【例 36】 (1993 年考研题)假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内二阶可导,过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$,其中 $0<c<1$,证明:在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

过

对 $f'(x)$ 用罗尔th.

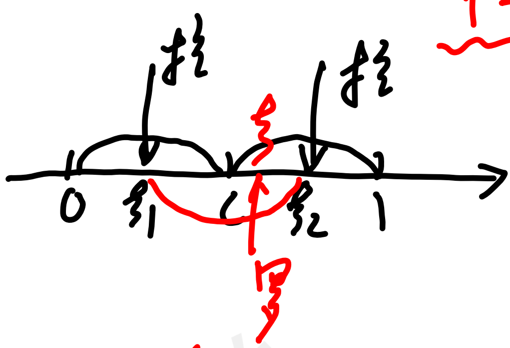
$f'(0) \neq f'(1)$ ✗

$f \xrightarrow{拉} f'$

A,B,C三点共线

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{f(1)-f(c)}{1-c}$$

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \checkmark$$



$\xi=(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$

【例 37】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)+f(2)+f(3)=0$,试证对任意实数 k,必存在 $\xi\in(0,3)$,使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

介值

$$f'(\xi)-kf(\xi)=0 \quad = F'(\xi)$$

$$e^{-k\xi}f'(\xi)-ke^{-k\xi}f(\xi)=0$$

对 $F(x)=e^{-kx}f(x)$ 用罗尔th.

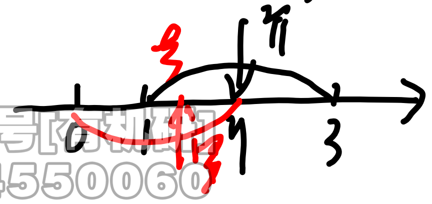
$\overset{0}{F(0)} \neq \overset{\neq 0}{F(3)}$ ✗

由于 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续,故在 $[1,3]$ 上必有最大值 M,最小值 m

$m\le f(1)\le M$, $m\le f(2)\le M$, $m\le f(3)\le M$

$$\Rightarrow \quad m\le \frac{f(1)+f(2)+f(3)}{3} \le M \quad =\mu$$

介值 $\exists\eta\in[1,3]$,使 $f(\eta)=\dfrac{f(1)+f(2)+f(3)}{3}=0$,即 $F(\eta)=0=F(0)$

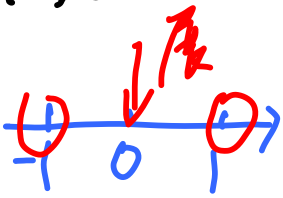


【例 38】 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=1$，$f(0)=2$，$f(1)=6$，$f''(1)=3$，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=0$。

$f \quad f' \quad f''$

对 $f''(x)$ 用罗尔 Th.　　$f''(-1) \overset{?}{=} f''(1)$ ✗　　$f''(\,?\,)=3$ ✓

“展中间赋两边”



$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\eta_0)x^2 \quad (\eta_0 \text{介于} 0 \text{与} x \text{之间})$$

令 $x=-1$，$f(-1)=f(0)-\cancel{f'(0)}+\frac{1}{2}f''(\eta_1)$ $(-1<\eta_1<0)$ ①

令 $x=1$，$f(1)=f(0)+\cancel{f'(0)}+\frac{1}{2}f''(\eta_2)$ $(0<\eta_2<1)$ ②

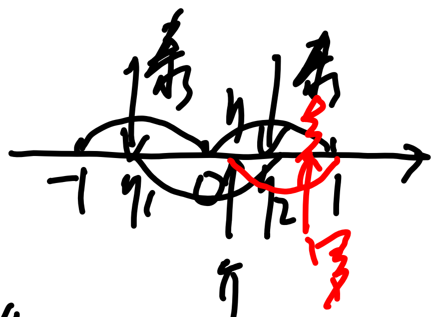
①+②：$f(-1)+f(1)=2f(0)+\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$

$$\Rightarrow f''(\eta_1)+f''(\eta_2)=6 \ \checkmark$$

由于 $f''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上连续，故在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上必有最大值 M，最小值 m

$$m \le f''(\eta_1) \le M, \quad m \le f''(\eta_2) \le M$$

$$\Rightarrow \quad m \le \boxed{\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}} \le M \quad = M$$



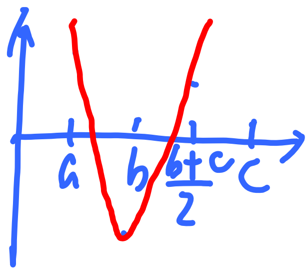
介值 $\Rightarrow$ $\exists \eta \in [\eta_1,\eta_2]$，使 $f''(\eta)=\dfrac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=3=f''(1)$

【例 39】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,d]$ 上连续，在 (a,d) 内存在二阶导数，并满足

$$f(a)\cdot f\left(\frac{b+c}{2}\right)>0, \quad f(b)\cdot f\left(\frac{b+c}{2}\right)<0$$

且

$$2\int_{\frac{b+c}{2}}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x=(c-b)f(d), \ \checkmark$$



其中常数 a,b,c,d 满足 $a<b<c<d$。证明存在 $\xi\in(a,d)$，使 $f''(\xi)=0$。

对 $f'(x)$ 用罗尔 Th.　　$f'(a) \overset{?}{=} f'(d)$ ✗

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases} f(a)\cdot f(b)<0 \\ f(b)\cdot f\left(\frac{b+c}{2}\right)<0 \end{cases} \xRightarrow{\text{零}} \underline{f(\eta_1)=f(\eta_2)=0} \xRightarrow{\text{罗}} f'(\xi_1)=0 \\ \int_{\frac{b+c}{2}}^{c} f(x)\,dx \overset{\text{积}}{=} f(\eta_3)\,\frac{c-b}{2} \Rightarrow \underline{f(\eta_3)=f(d)} \xRightarrow{\text{罗}} f'(\xi_2)=0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{罗}} f''(\xi)=0$$