含一个中值 (导数) 分析(构造法)　下次课 周日 19点

含两个中值 拉.柯
- 两个中值无要求
- 两个中值不同 分析法

【例 40】 (1998 年考研题)设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)\neq 0$,试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$.

☆ 在证含两个中值的等式前,先将含同一中值的形式移至等式一边.

$f(x), e^x$ 柯 (一个具体,一个抽象)

$$\boxed{\frac{e^\eta}{f'(\eta)}}=\frac{e^b-e^a}{\boxed{(b-a)f'(\xi)}}$$ $=f(b)-f(a)$ 拉

(05-1,2) 已知函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$.证明:

易 (1) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

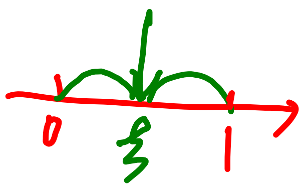
$f(\xi)-1+\xi=0$ $=F(\xi)$

[证] (1) 记 $F(x)=f(x)-1+x$, 则

$F(0)=-1<0,\ F(1)=1>0$

根据零点定理, $\exists\xi\in(0,1)$, 使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 对 $f(x)$ 分别在 $[0,\xi]$, $[\xi,1]$ 上用拉格朗日中值th., $\exists\eta\in(0,\xi)$, $\zeta\in(\xi,1)$, 使



$1-\xi=f(\xi)-f(0)=f'(\eta)\xi$ ①

$\xi=f(1)-f(\xi)=f'(\zeta)(1-\xi)$ ②

① × ②: $\cancel{(1-\xi)\xi} = f'(\eta) f'(\zeta) \cancel{\xi(1-\xi)}$

即 $f'(\eta) f'(\zeta) = 1$. #

七. 方程实根(函数零点)问题

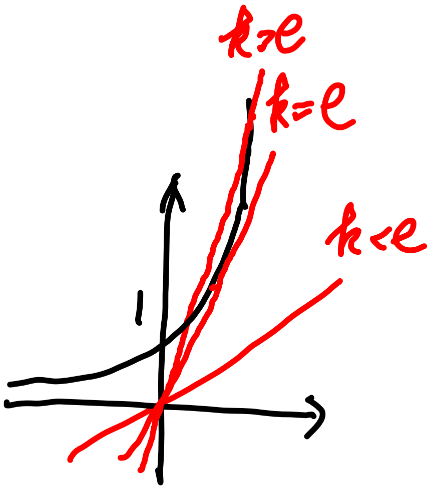
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 且单调

$f(a)\cdot f(b)<0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内有零点
唯一

1. 讨论零点个数与范围

S1. 求 $f(x)$ 单调区间

S2. 根据"$f(a)\cdot f(b)<0$"逐一判断 $f(x)$ 在各单调区间内有无零点.



【例 47】 当 $x>0$ 时,讨论曲线 $y=e^x$ 与 $y=kx$ 的交点个数.

$e^x = kx \Rightarrow k = \frac{e^x}{x}$

记 $f(x) = \frac{e^x}{x} - k \ (x>0)$, 则 $f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$ ✓

令 $f'(x)=0$, 则 $x=1$

x	$(0,1)$ +	1	$(1,+\infty)$ +
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$e-k$	↗

用极限值代替函数值

$f(1)=e-k$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

故当 $k>e$ 时,有2个交点;当 $k<e$ 时,无交点;当 $k=e$ 时,有1个交点.

2. 证明零点的存在性与唯一性

零. 罗　　单调

【例 44】 (1993 年考研题)设在$[0,+\infty)$上函数 $f(x)$有连续导数,且$\boxed{f'(x)\geqslant k}>0$, $f(0)<0$,证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点.

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$ $\qquad f(0)<0$ ✓ $\qquad f' \xrightarrow{\text{拉}} f$

找 $x_0>0$, 使 $f(x_0)>0$.

$f(x)-f(0) \overset{\text{拉}}{=} f'(\xi)x \geq kx$

$(0<\xi<x)$

$f(x_0)-f(0)\geq kx_0$.

$f(x_0)\geq kx_0+f(0)>0$

$x_0>-\frac{f(0)}{k}$

取 $x_0>-\frac{f(0)}{k}>0$, 则有 $f(x_0)\geq kx_0+f(0)>0$ ✓

根据零点th., $\exists\, \eta\in(0,x_0)\subset(0,+\infty)$, 使 $f(\eta)=0$.

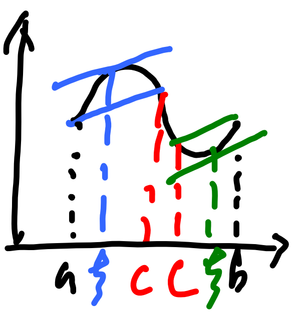
八. 用一元微分学的方法证明不等式

1. 含ξ的不等式

$$0<f'(\xi)=\frac{\boxed{f(b)-f(a)}}{b-a}\quad >0$$

【例 48】 (1990 年考研题)设不恒为常数的函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且 $f(a)=f(b)$,证明在区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

$f(x)\neq C \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$, 使 $f(c)\neq f(a)$



① 当 $f(c)>f(a)$, $\exists\,\xi\in(a,c)\subset(a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

② 当 $f(c)<f(a)=f(b)$, $\exists\,\xi\in(c,b)\subset(a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>0.$$

※

2.含绝对值的不等式

$$|f_1(x)\pm f_2(x)|\le |f_1(x)|+|f_2(x)|$$

【例 49】 (1996 年考研题)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$, $|f''(x)|\leqslant b$,其中 a,b 都是非负常数,c 是 $(0,1)$ 内任意一点. 证明 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

f, f'' 求 f'

"展中间代两边"

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2$$

(ξ 介于 c 与 x 之间)

展

0　c　1

令 $x=0$, $f(0)=\cancel{f(c)}-f'(c)c+\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2\ (0<\xi_1<c)$ ①

令 $x=1$, $f(1)=\cancel{f(c)}+f'(c)(1-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2\ (c<\xi_2<1)$ ②

②−①: $f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2\right]$

$$\Rightarrow |f'(c)|=\left|f(1)-f(0)-\frac{1}{2}\left[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2\right]\right|$$

$$\le \underbrace{|f(1)|}_{\le a}+\underbrace{|f(0)|}_{\le a}+\frac{1}{2}\underbrace{|f''(\xi_2)|}_{\le b}(1-c)^2+\frac{1}{2}\underbrace{|f''(\xi_1)|}_{\le b}c^2$$

$$\le 2a+\frac{b}{2}\left[(1-c)^2+c^2\right]\le 2a+\frac{b}{2}.$$

$$(1-c)^2+c^2=1-2c+2c^2=1+\underbrace{2c(c-1)}_{<0}<1$$

3.含x的不等式

法一: $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)\uparrow \Rightarrow f(x)>f(x_0)$

法二: $f(x)$ 在 x_0 处取最小值 $\Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$

【例 51】 证明：$\ln(x^2+1)\leqslant e^{2x}-1\ (x\geqslant 0)$.

记 $f(x)=\ln(x^2+1)-e^{2x}+1.\ (x\geqslant 0)$

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}-2e^{2x}=2\,\frac{\boxed{x-(1+x^2)e^{2x}}}{1+x^2}\quad <0$$

$1+x^2>0$

再记 $g(x)=x-(1+x^2)e^{2x},\ x\geqslant 0$

$g'(x)=1-2xe^{2x}-2(1+x^2)e^{2x}$ ✓

$g''(x)=-2e^{2x}-4xe^{2x}-4xe^{2x}-4(1+x^2)e^{2x}$

$=-2e^{2x}(3+4x+2x^2)<0$

故 $g'(x)\downarrow \Rightarrow g'(x)\leqslant g'(0)=-1<0\Rightarrow g(x)\downarrow$

$\Rightarrow g(x)\leqslant g(0)=-1<0$，从而 $f'(x)<0\Rightarrow f(x)\downarrow$

$\Rightarrow f(x)\leqslant f(0)=0$，即原不等式得证. #

4. 含a,b的不等式

法一：$f'(x)\nearrow$ ✓ $\Rightarrow f'(a)<f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)\quad (a<\xi<b)$

$\Rightarrow f'(a)(b-a)<\boxed{f(b)-f(a)}<f'(b)(b-a)$.

法二：$f(x)$ 在 $(a,b)\nearrow \Rightarrow f(a)<f(b)$

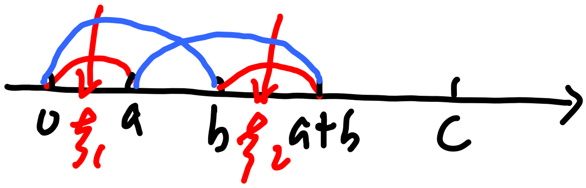
法三：做"变性手术"：$b\to x$

$$F(a,x)>0\xRightarrow{\text{令}x=b}F(a,b)>0$$

【例 55】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有三阶导数，且满足 $f'''(x)>0$，$f''(0)=f(0)=0$，证明 $f(a+b)>f(a)+f(b)$，其中常数 a,b 满足 $0<a<b<a+b<c$.

$f'''(x)>0 \Rightarrow f''(x)\nearrow \Rightarrow f''(x)>f''(0)=0 \Rightarrow f'(x)\nearrow$ ✓

1° $f(a+b)-f(a)>f(b)-f(0)$



2° $f(a+b)-f(b)>f(a)-f(0)$ ✓

$$\begin{cases} f(a)=f(a)-f(0)=af'(\xi_1)\ (0<\xi_1<a) \\ f(a+b)-f(b)=af'(\xi_2)\ (b<\xi_2<a+b) \end{cases}$$

由 $f'(x)\nearrow \Rightarrow f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow f(a)<f(a+b)-f(b)$

$\Rightarrow f(a+b)>f(a)+f(b).$ ✓

【例 56】（2004 年考研题）设 $e<a<b<e^2$，证明 $\boxed{\ln^2 b-\ln^2 a}>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

"$g(b)-g(a)$"

法一： $\underbrace{\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b}_{f(b)} > \underbrace{\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a}_{f(a)}$

记 $f(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x\ (e<x<e^2)$，则 $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}$

$f''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$

$\Rightarrow f'(x)\searrow \Rightarrow f'(x)>f'(e^2)=0 \Rightarrow f(x)\nearrow \Rightarrow f(b)>f(a).$ ✓

法二：记 $g(x)=\ln^2 x\ (e<x<e^2)$，则 $g'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$

$g''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$

✓ $\Rightarrow g'(x)\searrow$

$\ln^2 b-\ln^2 a \overset{拉}{=} \dfrac{2\ln\xi}{\xi}(b-a) > \dfrac{2\ln e^2}{e^2}(b-a)=\dfrac{4}{e^2}(b-a).$

法二：做"变性手术"：$b \to x$

$$\ln^2 x - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(x-a) \quad \checkmark$$

【证】记 $h(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a) \quad (e<a<x<e^2)$

$$h'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$$

$$h''(x)=2\,\frac{1-\ln x}{x^2}<0$$

$\Rightarrow h'(x)\downarrow \Rightarrow h'(x)>h'(e^2)=0 \Rightarrow h(x)\uparrow \Rightarrow h(x)>h(a)=0$

令 $x=b$，则原不等式得证.

强化班讲：

① 曲率（仅数一、二）

② 导数的物理应用——相关变化率（仅数一、二）

③ 导数的经济应用（仅数三）