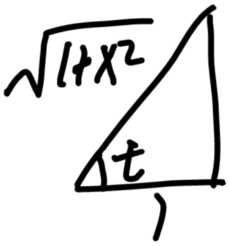
1. 求下列积分：

（1） $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ $\xlongequal{令 x=\tan t} \int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t \sec t} dt$

$= \int \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$

$= \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C.$

$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$



（2） $\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx$ $\xlongequal{令 \sqrt{x}=t} \int_0^1 \arctan t \, d(t^2)$

$= [t^2 \arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt$

$= \frac{\pi}{4} - [t - \arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$

（3） $\int_0^2 |x-1| e^x dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + \int_1^2 (x-1)e^x dx$

$= \int_0^1 e^x dx - \int_1^2 e^x dx + \int_1^2 xe^x dx - \int_0^1 xe^x dx$

$= [e^x]_0^1 - [e^x]_1^2 + [(x-1)e^x]_1^2 - [(x-1)e^x]_0^1$

$= e - 1 \cancel{- e^2} + e \cancel{+ e^2} - 1 = 2(e-1).$

注 $\int xe^x dx = \int x\, d(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

2. 微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为 $y=$________.

由 $r^3-2r^2+5r=0 \Rightarrow r(r^2-2r+5)=0$.

$$\Rightarrow r_1=0,\ r_{2,3}=\frac{2\pm\sqrt{16}\,i}{2}=1\pm 2i$$

$$y=C_1+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$$

或 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+C_3$

3. 二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$__________.

由 $r^2-4r+3=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=3$ $Y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

设 $y^*=Ae^{2x}$，则 $y^{*\prime}=2Ae^{2x}$，$y^{*\prime\prime}=4Ae^{2x}$

$$(4A-8A+3A)\cancel{e^{2x}}=2\cancel{e^{2x}} \Rightarrow A=-2$$

故 $y^*=-2e^{2x}$ 通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$

4. 微分方程 $y''+y=\cos x+x$ 的特解形式可设为（ B ）

A. $y^*=A\cos x+B\sin x+Cx+D$. B. $y^*=x(A\cos x+B\sin x)+Cx+D$.

C. $y^*=x(A\cos x+B\sin x)+Cx$. D. $y^*=Ax\cos x+Cx+D$.

对于 $y''+y=\cos x$，由 i 是 $r^2+1=0$ 的根得

$$y_1^*=x(A\cos x+B\sin x)$$

对于 $y''+y=x$，由 0 不是 $r^2+1=0$ 的根得

$$y_2^*=Cx+D$$

故 $y^*=y_1^*+y_2^*$

5. 微分方程 $(x+y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为 $\underline{\arctan\frac{y}{x}}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}=\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$$

$$\xRightarrow[(y=ux)]{\text{令}\frac{y}{x}=u} u+x\frac{du}{dx}=\frac{u-1}{u+1}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{\cancel{u}-1-u^2-\cancel{u}}{u+1}$$

$$\Rightarrow\int\frac{1+u}{1+u^2}du=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=-\ln x+C$$

$$\Rightarrow\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)+\underline{\ln x}=C. \text{ 由 } y(1)=0\Rightarrow C=0$$

6. 微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解为 $y=$ $\underline{xe^{-\frac{x^2}{2}}}$.

$$y=e^{-\int x\,dx}\left(\int e^{-\frac{x^2}{2}}\underline{e^{\int x\,dx}}dx+C\right)$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int dx+C\right)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x+C)$$

由 $y(0)=0\Rightarrow C=0$