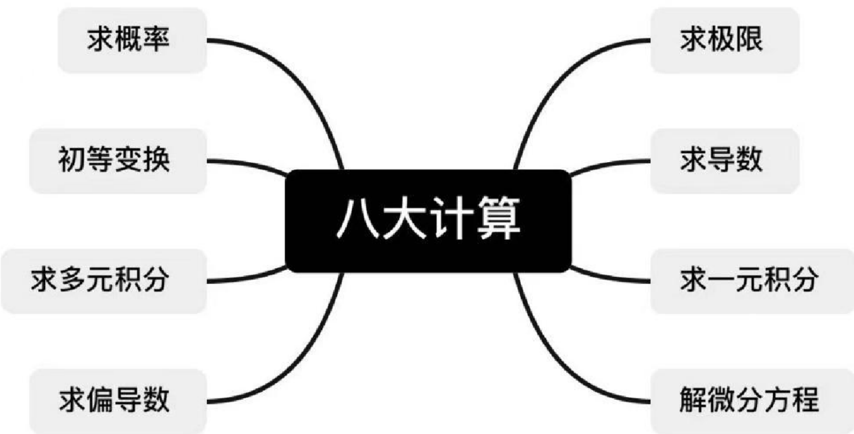
每周二、五、日 19点 1/24

2026 考研数学零基础课程

主讲：王志超

各类题分值	2025 年			2024 年		
	数一	数二	数三	数一	数二	数三
计算题	**98**	**74**	**86**	**94**	**76**	**89**
应用题	30	42	30	34	37	49
概念题	10	10	10	10	25	0
证明题	12	24	24	12	12	12

考研数学的基本盘是计算！！！



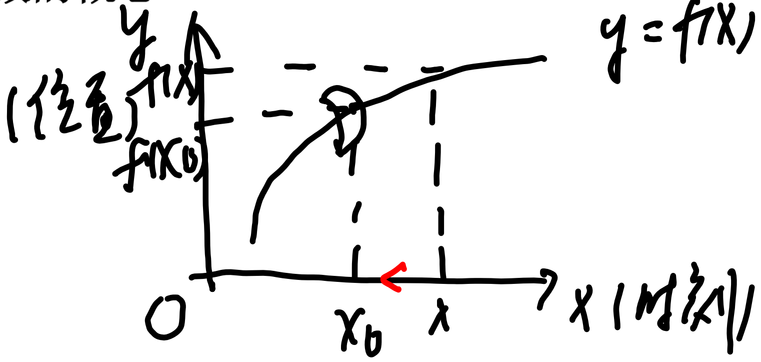
高等数学各章分值	2025 年			2024 年		
	数一	数二	数三	数一	数二	数三
极限	5	15	10	5	10	10
一元微分学	22	39	29	17	27	17
一元积分学	10	20	15	5	27	22
微分方程	0	10	5	5	17	0
多元微分学	17	17	5	17	22	17
多元积分学	22	17	17	27	15	15
无穷级数	10	/	5	10	/	5

第一讲　求导数

求导数

- 基本初等函数的求导公式
  - 幂函数
  - 指数函数
  - 对数函数
  - 三角函数
  - 反三角函数
- 导数的四则运算
- 复合函数的求导
- 隐函数的求导
  - 一阶导
  - 二阶导
- 幂指函数的求导
- 参数方程的求导（仅数一、二）
  - 一阶导
  - 二阶导
- 极坐标方程求切线（仅数一、二）
- 反函数的求导
  - 一阶导
  - 二阶导

一、导数的概念



瞬时

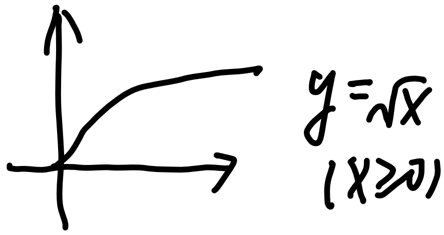
$$f'(x_0) \triangleq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

记法：$f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$.

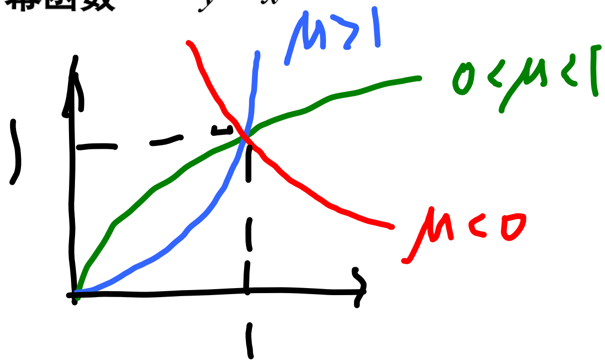
y'', y''', $y^{(4)}$, $\cdots$, $y^{(n)}$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\cdots$, $\frac{d^ny}{dx^n}$

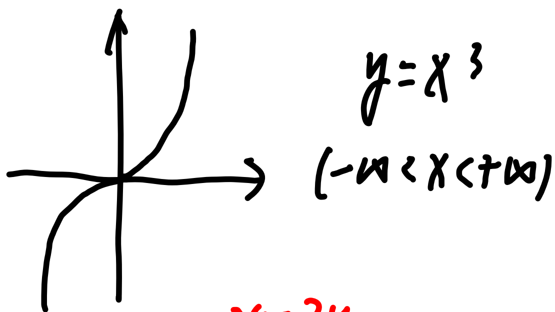
二、基本初等函数及其导数

如



1. 幂函数 $y = x^{\mu}$



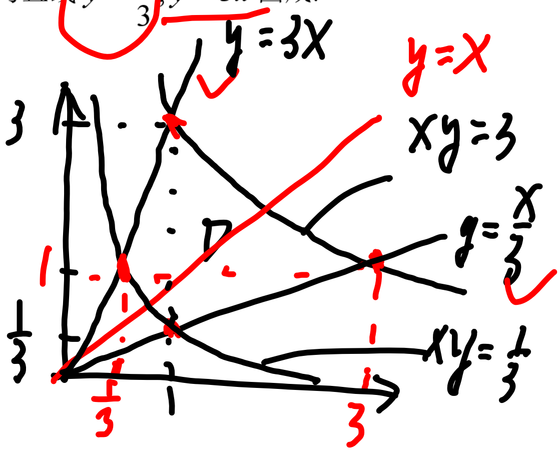


(24-2,3) 设平面区域 D 位于第一象限，由曲线 $xy=\frac{1}{3}, xy=3$ 与直线 $y=\frac{x}{3}, y=3x$ 围成.

$\Rightarrow x=3y$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3x} \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{3}{x} \\ y=\frac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$



【指数运算】a,b 为正整数

$x^{-a}=\dfrac{1}{x^a}(x\neq 0)$，$x^a\cdot x^b=x^{a+b}$，$(x^a)^b=x^{ab}$

$x^{\frac{1}{a}}=\sqrt[a]{x}(x\geq 0)$，$x^{\frac{b}{a}}=\sqrt[a]{x^b}=(\sqrt[a]{x})^b(x\geq 0)$

$(xy)^a=x^a\cdot y^a$，$\left(\dfrac{x}{y}\right)^a=$ $(x\cdot\frac{1}{y})^a=x^a\cdot(\frac{1}{y})^a=x^a\cdot y^{-a}=\dfrac{x^a}{y^a}$

【练 1】$(9^3)^{-\frac{1}{2}}=$ 1/27

$9^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{(\sqrt{9})^3}=\dfrac{1}{3^3}$

$a^2=4\Rightarrow a=\pm\sqrt{4}$

【练 2】$(4^{2-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=$ 2

$(4^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{2}}$

$(4^2\cdot 4^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(16\times\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}$

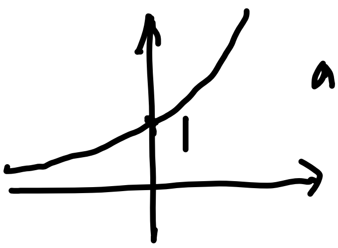
【幂函数求导公式】$(C)'=0$，$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$

【练】$(\sqrt[3]{x^2})'\big|_{x=27}=$ 2/9

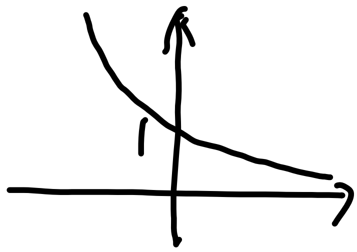
$(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{2}{3}\times 27^{-\frac{1}{3}}$

2. 指数函数　$y=a^x\quad(a>0,a\neq 1)$



$a>1$



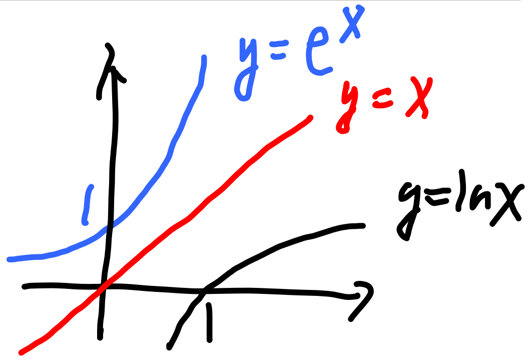
$0<a<1$

如 $y=e^x\Rightarrow x=\ln y$

$(e\approx 2.7181$

【指数函数求导公式】$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，$(a^x)'=a^x\ln a$

3. 对数函数 $y=\ln x \quad (x>0)$



反函数

【对数运算】$e^{\ln a}=a$，$\ln e^{a}=a$

$\ln x^{a}=a\ln x$，$\ln(xy)=\ln x+\ln y$，$\ln\frac{x}{y}=$ $\ln x\cdot\frac{1}{y}=\ln x+\ln\frac{1}{y}=\ln x-\ln y$.

【练 1】$\ln\sqrt{e}=$ $1/2$ $\ln e^{\frac{1}{2}}$

【练 2】$\ln a=2$，$a=$ e^{2}

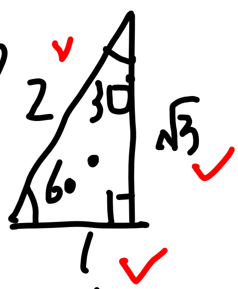
【练 3】$e^{2+\ln 2}=$ $2e^{2}$ $e^{2}\cdot e^{\ln 2}$

【对数函数求导公式】$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

变化速度：指数函数>>幂函数>>对数函数 当 $x\to+\infty$

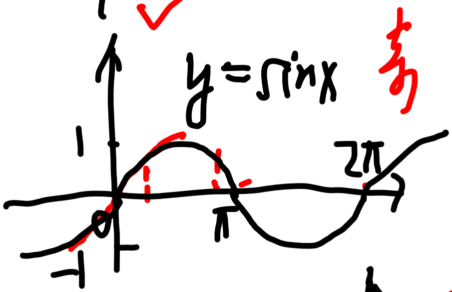
4. 三角函数 $y=\sin x \quad y=\cos x \quad y=\tan x$

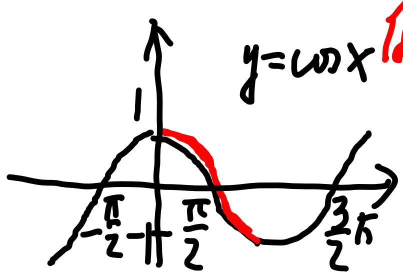
如图

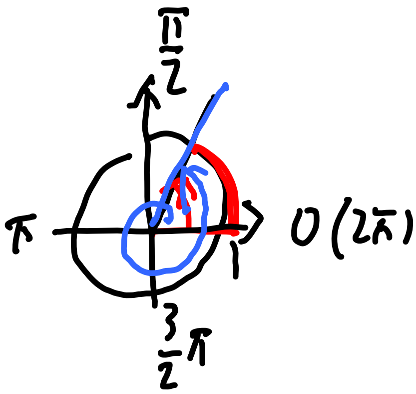


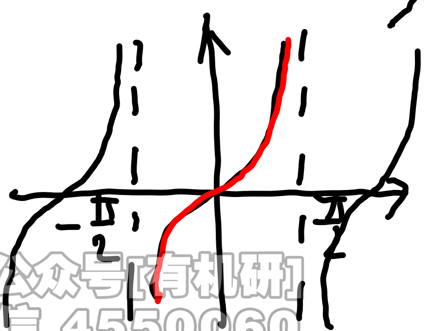
$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\ (k\in Z)$

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$









$y=\tan x$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

【注】$f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow f(x)$ 图形关于原点对称

$f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(-x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)$ 图形关于 y 轴对称

$f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow f(x+T)=f(x)$

【特殊角的三角函数值】

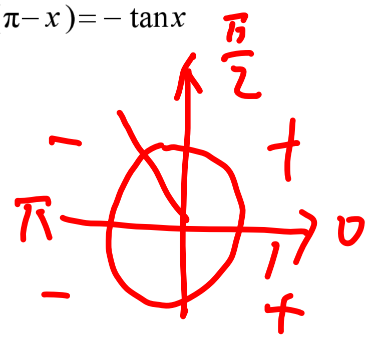
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

【三角函数诱导公式】$\sin(\pi-x)=\sin x, \cos(\pi-x)=-\cos x, \tan(\pi-x)=-\tan x$

$\sin(\pi+x)=-\sin x, \cos(\pi+x)=-\cos x, \tan(\pi+x)=\tan x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x, \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x, \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$



$\cot x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}, \sec x=\frac{1}{\cos x}, \csc x=\frac{1}{\sin x}$

【三角函数恒等变形公式】$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \sec^2 x-\tan^2 x=1, \csc^2 x-\cot^2 x=1$

$\sin 2x=2\cos x\sin x, \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x, \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$

【练】$\dfrac{\sin 2x}{\sin(3\pi - x)\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi - x\right)} =$ $-2\cot x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\sin(3\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

【三角函数求导公式】$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x, (\sec x)' = \sec x\tan x, (\csc x)' = -\csc x\cot x$

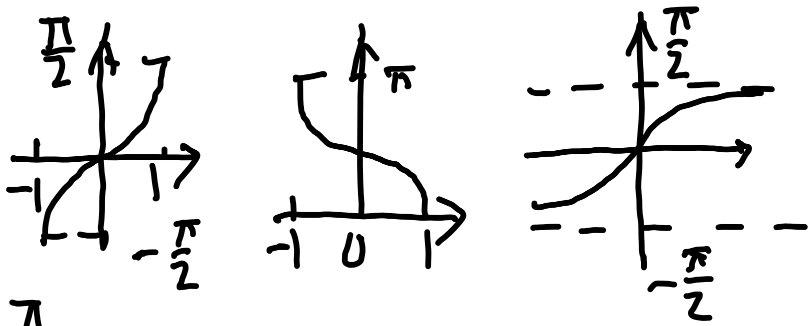
【练 1】$(\sin x)'\big|_{x=-\frac{\pi}{3}} =$ $\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

【练 2】$(\cot x)'\big|_{x=\frac{2}{3}\pi} =$ $-\frac{4}{3}$

$-\csc^2\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{\left(\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2} = -\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

5.反三角函数 $y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \arctan x$



【练 1】$\arctan 1 =$ $\frac{\pi}{4}$

【练 2】$y = \sin x\left(\frac{\pi}{2} \le x \le \pi\right)$，$x =$ $\pi - \arcsin y$

$y = \sin x = \sin(\pi - x)$ $\left(0 \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \pi - x = \arcsin y \Rightarrow x = \pi - \arcsin y$

【反三角函数求导公式】$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

三、导数的计算

1. 导数的四则运算

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (Cu)' = Cu'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

【例 1】设 $y = 2xe^x$，则 $y'|_{x=1} =$ $4e$.

$y' = 2(e^x + xe^x)$

【例 2】设函数 $y = (1+x^2)\arctan x$，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} =$ $\frac{\pi}{2}+1$ ✓.（《高等数学轻松学》P41）

$\frac{dy}{dx} = 2x\arctan x + \cancel{(1+x^2)\frac{1}{1+x^2}}\ 1$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\arctan x + 2x\frac{1}{1+x^2}$

2. 复合函数 $f[g(x)]$

如：$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$

$y = f(u),\ u = u(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

【例 1】设 $y=\ln(\cos x)$，则 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$y'=\frac{1}{\cos x}(\cos x)'=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$$

【例 2】设函数 $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$，则 $dy=$____________.（《高等数学轻松学》P42）

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\Rightarrow dy=f'(x)dx$$ 微分

$y=\sin\frac{1}{x}$

$-y^2$

$$\frac{dy}{dx}=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-\sin^2\frac{1}{x}\right)'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-2\sin\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-2\sin\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\frac{2}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}e^{-\sin^2\frac{1}{x}}dx.$$

$\sin\frac{2}{x}$ //

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

【例 3】（21-3）若 $y=\cos\left(e^{-\sqrt{x}}\right)$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$ $\frac{1}{2}e^{-1}\sin e^{-1}$ ✓

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(e^{-\sqrt{x}})\cdot(e^{-\sqrt{x}})'=-\sin(e^{-\sqrt{x}})\cdot e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x})'$$

$$=\cancel{-}\sin(e^{-\sqrt{x}})\cdot e^{-\sqrt{x}}\left(\cancel{-}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$