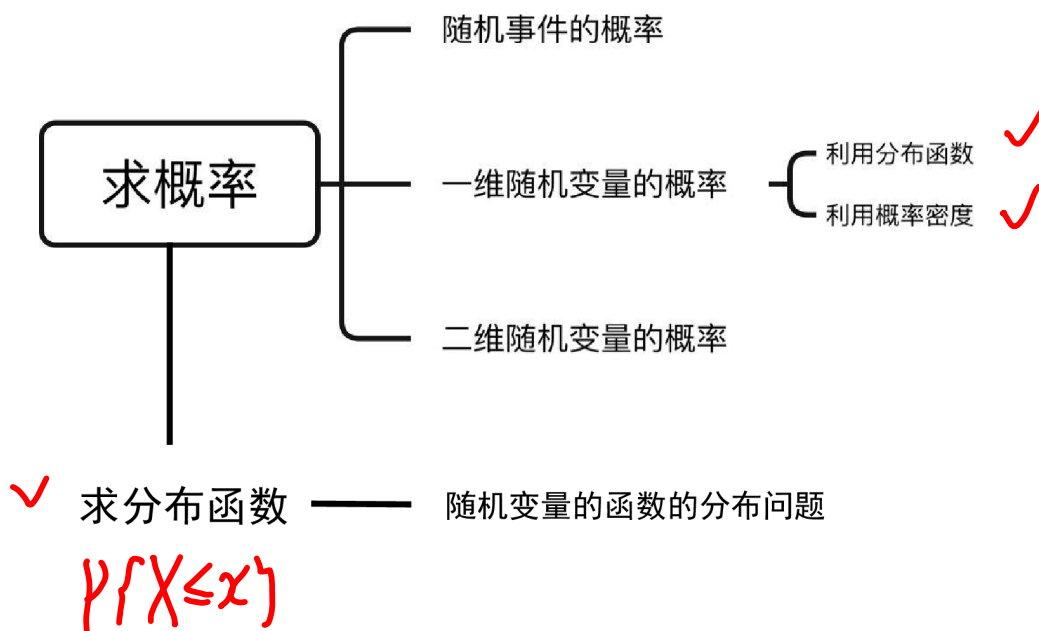
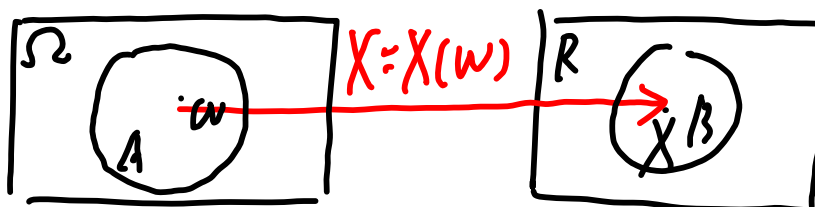


第八讲 求概率（仅数一、三）



概率论与数理统计 各章分值	2025 年		2024 年		2023 年	
	数一	数三	数一	数三	数一	数三
随机事件和概率	5	5	0	0	0	0
一维随机变量及其分布	5	5	5	5	0	<u>12</u>
多维随机变量及其分布	<u>12</u>	<u>12</u>	10	10	<u>17</u>	0
随机变量的数字特征	5	5	5	5	5	10
大数定律和中心极限定理	0	0	0	0	0	0
数理统计的基本概念	0	5	0	<u>12</u>	5	10
参数估计	0	0	<u>12</u>	0	5	0
假设检验（仅数一）	5	-	0	-	0	-



如 $X = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$

抛硬币正朝上
... 反 ...

一、求随机事件的概率

$A \cap B$



①加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

②减法公式: $P(A - B) = P(A \bar{B}) = P(A) - P(AB)$



③乘法公式: $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

【注】(1) 称 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率

(2) 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 独立

$P(A|\Omega) = \frac{P(A\Omega)}{P(\Omega)}$

【例】(14-1,3) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$

(B)

(A) 0.1.

(B) 0.2.

(C) 0.3.

(D) 0.4.

由 $0.3 = P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \Rightarrow P(A) = 0.6$

$P(B - A) = P(B) - P(BA) = 0.5 - 0.5 \times 0.6 = 0.2$

二、求一维随机变量的概率

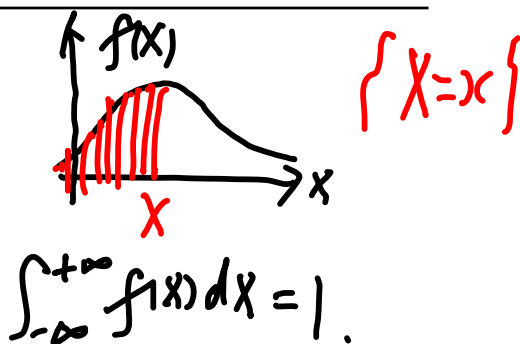
1. 分布律、概率密度与分布函数的概念

	离散型随机变量	连续型随机变量
分布律或概率密度	$p\{X=x_i\}, i=1,2,\dots$	$f(x) = F'(x)$
分布函数	$F(x) \triangleq P\{X \leq x\}$ $= \sum_{x_i \leq x} p\{X=x_i\},$ $-\infty < x < +\infty$	$F(x) \triangleq P\{X \leq x\}$ $= \int_{-\infty}^x f(t) dt,$ $-\infty < x < +\infty$

如

X	0	1	2
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\sum_{i=1}^{+\infty} p\{X=x_i\} = 1$



2. 利用分布函数求概率

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a)$$

3. 求正态随机变量的概率

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 并称 Y 服从标准正态分布.

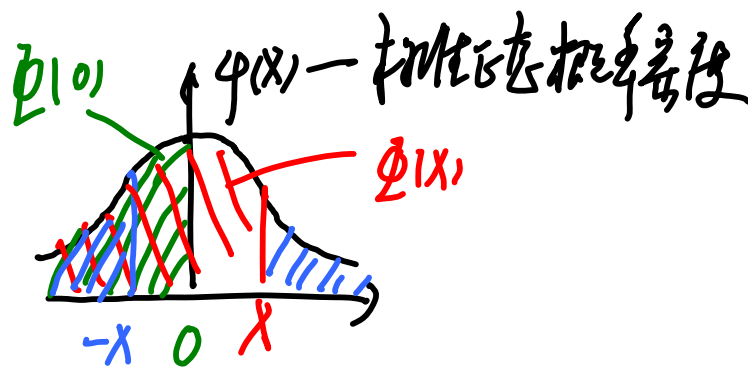
$$\begin{aligned} P\{a < X < b\} &= P\left\{\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= P\left\{\frac{a - \mu}{\sigma} < Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态随机变量的分布函数

【注】(1) $\Phi(x)$ 单调递增.

(2) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

(3) $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.



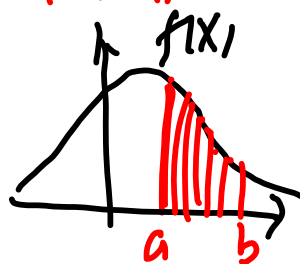
【例】设随机变量 $X \sim (3, 2^2)$, 则 $P\{X \geq 3\} =$ _____.

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X \leq 3\} = 1 - P\left\{\frac{X - 3}{2} \leq \frac{3 - 3}{2}\right\} = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

$\sim N(0, 1)$

4. 利用概率密度求概率

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx$$



【例】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$[-1, 1) \cup [0, 2]$

则 $P\{-1 \leq X < 1\} =$ _____.

$$\begin{aligned} P\{-1 \leq X < 1\} &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{4}x^2 + x\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5. 随机变量的函数的分布问题

$$Y = g(X) \quad f_X(x) \xrightarrow{\text{求概率}} \boxed{F_Y(y)} \xrightarrow{\text{求导}} f_Y(y)$$

$P\{g(X) \leq y\}$

【例】(23-3) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, -\infty < x < +\infty$. 令 $Y = e^X$. 求 Y 的概率密度.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^X \leq y\}$$

$$= \begin{cases} P\{X \leq \ln y\}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{对 } y > 0, F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \left[-\frac{1}{1+e^x} \right]_{-\infty}^{\ln y}$$

$$= -\frac{1}{1+e^{\ln y}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} \rightarrow 0$$

$$= -\frac{1}{1+y} + 1$$

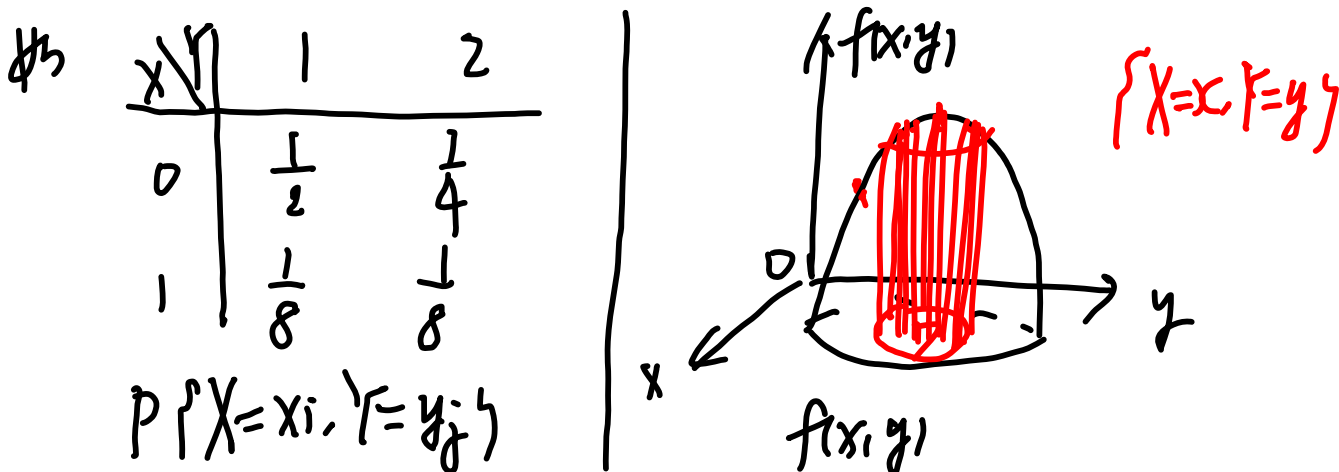
$$\text{故 } F_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{1+y} + 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad \text{从而}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

三、求二维随机变量的概率

(X, Y)

1. 联合分布律与联合概率密度的概念



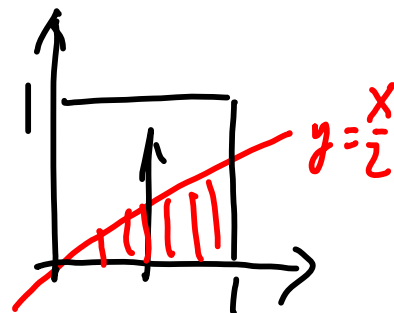
2. 利用联合概率密度求概率

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

【例】(07-1,3) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $P\{X > 2Y\}$.



$$\begin{aligned} P\{X > 2Y\} &= \iint_{y < \frac{x}{2}} f(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (2-x-y) dy \\ &= \int_0^1 \left[(2-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{5}{8}x^2 \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^3 \right]_0^1 = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

