【例 4】设 $y = xf(x^2)$，f 具有二阶导数，且 $f'(1) = f''(1) = 1$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1} =$ <u>10</u>.

$$\frac{dy}{dx} = f(x^2) + x\boxed{f'(x^2)}\cdot 2x = f(x^2) + 2x^2 f'(x^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f'(x^2)\cdot 2x + 4x f'(x^2) + 2x^2\boxed{f''(x^2)}\cdot 2x$$

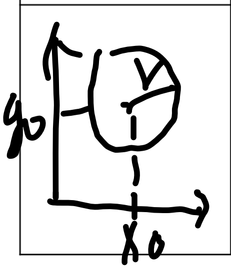
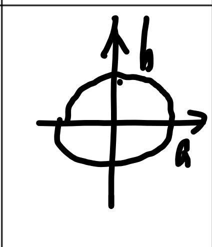
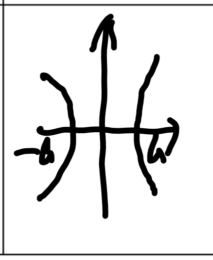
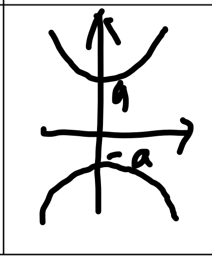
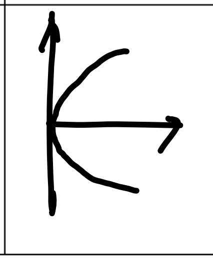
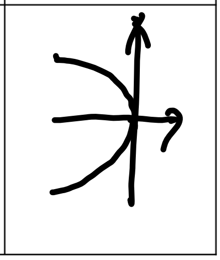
$$= 6x f'(x^2) + 4x^3 f''(x^2)$$

$$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

$$\{f'[g(x)]\}' = f''[g(x)]\cdot g'(x)$$

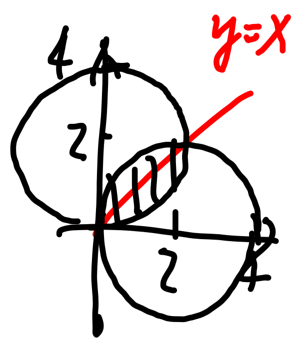
3. 隐函数　　$F(x, y) = 0$

比如圆锥曲线 $(a, b > 0)$：

圆	椭圆	双曲线		抛物线	
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$	$y^2 = ax$	$y^2 = -ax$
					

【注】$S_{圆} = \pi r^2, L_{圆} = 2\pi r, S_{椭圆} = \pi ab, L_{椭圆} = 2\pi b + 4(a-b)(a > b)$

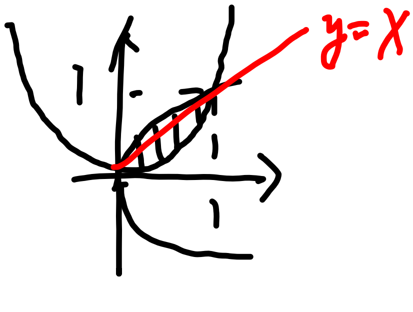
（25-2）$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4x, x^2 + y^2 \le 4y\}$　$y = \sqrt{4x - x^2}$



$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$$

（25-3）$D = \{(x, y) \mid y^2 \le x, x^2 \le y\}$



$x \ge y^2$　　$y \ge x^2$

$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$F(x,y)=0$ 看作中间变量

两边对 x 求导

$G(x,y,\frac{dy}{dx})=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=g(x,y)$

【例 1】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x+e^{y}+\sin(xy)=1$ 确定，则 $dy|_{x=0}=$ $-dx$.

$$1+e^{y}\frac{dy}{dx}+\cos(xy)\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1-y\cos(xy)}{e^{y}+x\cos(xy)}$$

当 $x=0$, $0+e^{y}+0=1 \Rightarrow y=0$ $\qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=-1$

【例 2】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x-y+\sin y=0$ 确定，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$__________.

$$1-\frac{dy}{dx}+\cos y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\cos y-1}=\frac{1}{1-\cos y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(1-\cos y)^2}\sin y\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin y}{(1-\cos y)^3}$$

4. 幂指函数 $\quad y=f(x)^{g(x)} \quad (f(x)>0)$

$\ln y=\ln f(x)^{g(x)}$

$\Rightarrow \ln y=g(x)\ln f(x)$

$(x^x)'\neq x\cdot x^{x-1}$

$(x^x)'\neq x^x\ln x$

【例】曲线 $y=x^{x}(x>0)$ 在点 $(1,1)$ 处的法线方程为 $y=-x+2$

$\ln y=x\ln x$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\ln x+x\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=(\ln x+1)y=(\ln x+1)x^{x}.$$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=1 \qquad$ 法线：$y-1=-(x-1)$

$\Rightarrow y=-x+2$

【注】曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率为 $f'(x_0)$，则 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\ \ (f'(x_0)\neq 0).$$

5. 参数方程（仅数一、二） $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

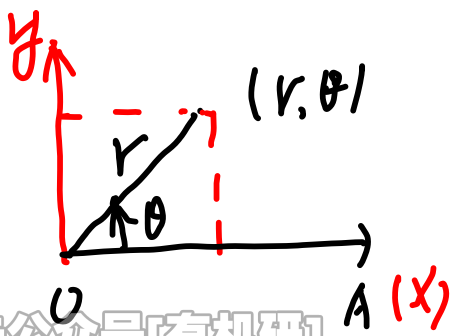
如 $x^2+y^2=1$ $\quad\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

【例】 设 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t^2,\\ y=t+1,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=$ $\underline{-\frac{1}{8}}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{t}\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{t}=-\frac{1}{t^3}$$

6. 极坐标（仅数一、二） $r=r(\theta)$



$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

【例】(14-2) 设曲线 L 的极坐标方程为 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程为__________.

$r+\frac{dr}{d\theta}$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{为参数})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

当 $r=\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=\frac{\pi}{2}$ 切线：$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$

$$\Rightarrow y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2} \quad ✓$$

7. 反函数 $y=e^x$ $x=\ln y$

$y=f(x)$ 的反函数为 $x=g(y)$.

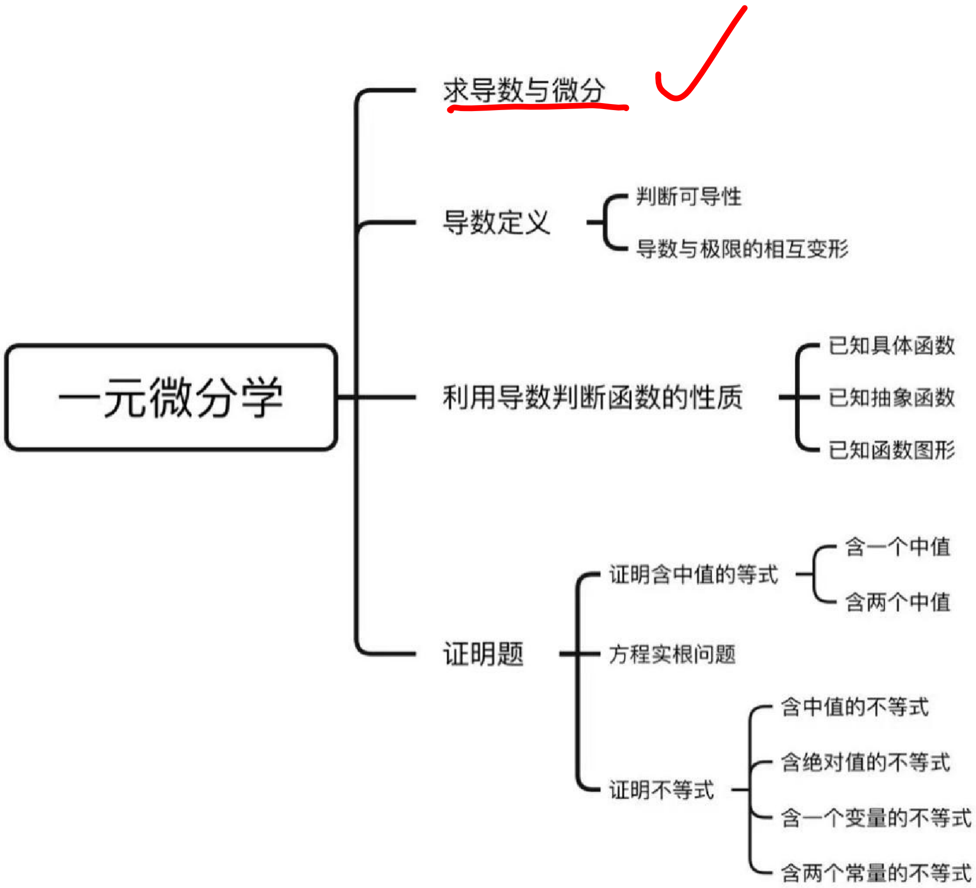
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\boxed{\frac{1}{y'}}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{(y')^2}y''\cdot\frac{1}{y'}=\boxed{-\frac{y''}{(y')^3}}$$

【例】(03-1,2-局部) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数. 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程.

$$-\frac{y''}{(y')^3}+(y+\sin x)\left(\frac{1}{y'}\right)^3=0$$

$$\Rightarrow -y''+y+\sin x=0 \Rightarrow y''-y=\sin x$$


一元微分学
求导数与微分
导数定义
判断可导性
导数与极限的相互变形
利用导数判断函数的性质
已知具体函数
已知抽象函数
已知函数图形
证明题
证明含中值的等式
含一个中值
含两个中值
方程实根问题
证明不等式
含中值的不等式
含绝对值的不等式
含一个变量的不等式
含两个常量的不等式

第二讲 求极限

- 求极限
  - 函数极限
    - 已定型
      - 常数型
      - “非零常数/0”型
      - “0•有界”型
    - 未定型 (式)
      - ∞/∞型
      - 0/0型
      - 0•∞型
      - ∞−∞型
      - 1^∞型
      - 0^0型
      - ∞^0型

7种

  - 数列极限

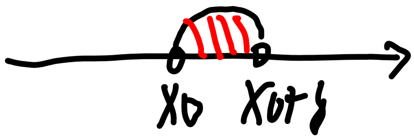
一、极限与连续的概念

1. 极限

$$\lim_{\boxed{x\to\cdot}} f(x)=A$$

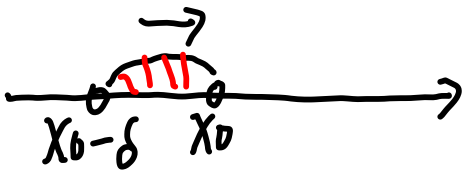
$x\to\cdot$ 的定义：

① $x\to x_0^+$



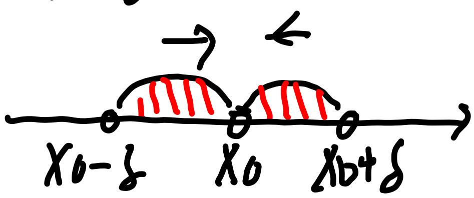
右邻域 $\delta>0$

② $x\to x_0^-$



左邻域

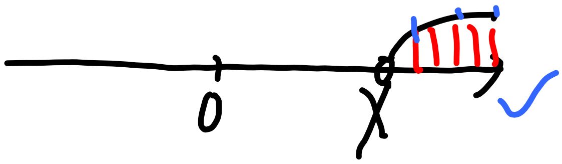
③ $x\to x_0$



去心邻域

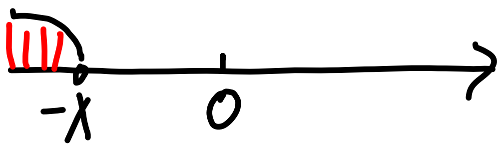
★ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

④ $x\to+\infty$

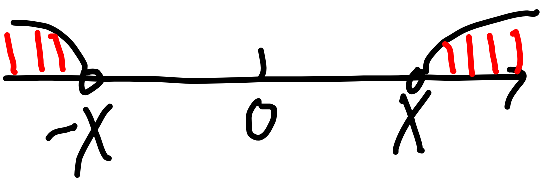


$\exists X>0$

⑤ $x\to-\infty$



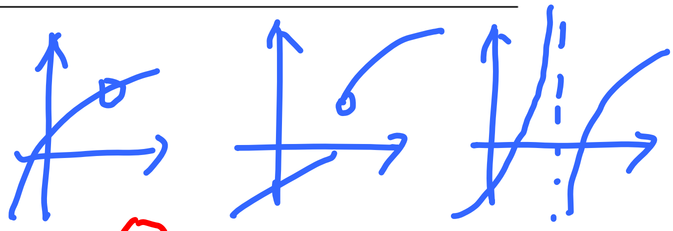
⑥ $x\to\infty$



$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

$n=1,2,\cdots$

★ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A.$



2. 连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处连续 ①

②

由常数和基本初等函数经有限次四则运算或复合构成的用一个式子表示的函数叫做初等函数

无穷次　不分段

一切初等函数在其定义区间内都是连续的

二、求初等函数的极限　代入

1. 初等函数呈已定型

（1）常数型

如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$

“$\frac{1}{0}\to\infty$”　“$\frac{1}{\infty}\to 0$”

（2）“$\dfrac{\text{非零常数}}{0}$”型

如 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x-1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1} = -\infty$　$x-1\to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-2}{x-1} = +\infty$　$x-1\to 0^-$

$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

极限不存在：①∞, $+\infty$, $-\infty$　②左≠右　③“振荡”，如 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

（3）“0·有界函数”型

如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x = 0.$　$\frac{1}{x}\to 0$　有界

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$　$\frac{0}{0}$　② $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$　$x\to 0$　有界　③ $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$　$0\cdot\infty$