【证明】$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

法一：$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x}$ $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$

$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1}\right) d(\sin x)$

$= -\frac{1}{2}\left(\ln|\sin x - 1| - \ln|\sin x + 1|\right) + C.$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} + C$

$= \ln|\sec x + \tan x| + C$

法二：$\int \sec x dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

$= \int \frac{d(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

3. 换元积分法 (根式一去根号！) ①换限 ②求 dx

（1）根式代换 (根式单调)

$dx = d(t^2+2)$
$= (t^2+2)'dt = 2t\,dt$

【例】(00-2) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ ________.

令 $\sqrt{x-2} = t$，则 $x = t^2+2$. 当 $x=2$ 时，$t=0$；当 $x \to +\infty$ 时，$t \to +\infty$

原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{2t\,dt}{(t^2+9)t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+9} = \frac{6}{9}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(\frac{t}{3}\right)}{1+\left(\frac{t}{3}\right)^2}$

$= \frac{2}{3}\left[\arctan\frac{t}{3}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{3}\left(\lim_{t\to+\infty} \arctan\frac{t}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$

（2）三角代换

$$\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 x=1 \\ \sec^2 x-\tan^2 x=1 \end{cases}$$

☆ 用换元积分法的前提是令成 t 的式子必须单调

当 $a>0$ 时，

$$\begin{cases} ①\sqrt{a^2-x^2} \text{——令 } x=a\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ ②\sqrt{a^2+x^2} \text{——令 } x=a\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ ③\sqrt{x^2-a^2} \text{——令 } x=a\sec t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

① 求 dx

② 回代

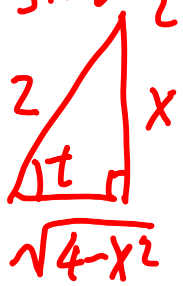
【例 1】 $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=$__________.

令 $x=2\sin t$　　$dx=d(2\sin t)=(2\sin t)'dt=2\cos t\,dt$

原式 $=\int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=4\int\cos^2 t\,dt$

$=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=2\left(t+\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2t}_{=2\sin t\cos t}\right)+C$

$\sin t=\frac{x}{2}$



$=2\arcsin\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}+C$

$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$ ✓

【例 2】（04-2）$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$__________.

令 $x=\sec t$，则当 $x=1$ 时，$t=0$；当 $x\to+\infty$ 时，$t\to\frac{\pi}{2}$

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\frac{\pi}{2}$ ✓

$dx=(\sec t)'dt$
$=\sec t\tan t\,dt$

4.分部积分法 (两不同类函数之积/对数/反三角)

$$
\begin{cases}
\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x \\
\int_a^b uv'\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x \\
\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u
\end{cases}
$$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\Rightarrow uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$

$\begin{cases} u \to u' \\ v' \to v \end{cases}$

作 u：$\begin{cases}\text{对数函数}\\ \text{反三角函数}\end{cases} \to$ 幂函数 $\to \begin{cases}\text{三角函数}\\ \text{指数函数}\end{cases}$

作 v'：$\begin{cases}\text{三角函数}\\ \text{指数函数}\end{cases} \to$ 幂函数 $\to \begin{cases}\text{对数函数}\\ \text{反三角函数}\end{cases}$

（1）直接分部

【例 1】 $\int te^t\mathrm{d}t =$ ____________.

$v' = e^t,\ u = t$

解 $= \int t\,d(e^t) = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$

【例 2】（22-1） $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$ ____________.

$v' = \frac{1}{\sqrt{x}},\ u = \ln x$

$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d(\sqrt{x})$

解 $= 2\int_1^{e^2} \ln x\, d(\sqrt{x}) = 2[\sqrt{x}\ln x]_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2}\sqrt{x}\, d(\ln x)$

$d(\ln x) = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$

$= 4e - 2\int_1^{e^2}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx = 4e - 2[2\sqrt{x}]_1^{e^2} = 4$

【例 3】 $\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t =$ ____________.

$v' = 1,\ u = \ln(1+t^2)$

解 $= [t\ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 t\, d[\ln(1+t^2)]$

$d[\ln(1+t^2)] = [\ln(1+t^2)]'dt$

$= \ln 2 - \int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}dt = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt$

$= \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \ln 2 - 2[t - \arctan t]_0^1$

$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

（2）循环分部

指数 × 三角

【例】$\int e^x \sin x dx =$ ____________.

$$原式 = \int \sin x \, d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$
$$= e^x \sin x - \int \cos x \, d(e^x) = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x)$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$
$$\Rightarrow 原式 = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

（3）换元分部

$dx = (t^2-1)' dt = 2t\,dt$

【例 1】$\int e^{\sqrt{x+1}} dx =$ ____________.

$$原式 \xlongequal[(x = t^2-1)]{令 \sqrt{x+1} = t} \int e^t \cdot 2t \, dt = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x+1}\, e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} + C$$

$dx = [\ln(t^2+1)]' dt = \frac{2t}{1+t^2} dt$

【例 2】求 $\int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

$$原式 \xlongequal[(x = \ln(t^2+1))]{令 \sqrt{e^x - 1} = t} \int_0^1 \frac{\ln(t^2+1) \cdot \cancel{(t^2+1)}}{t} \frac{2t}{\cancel{1+t^2}} dt$$
$$= 2\int_0^1 \ln(t^2+1) dt = 2\ln 2 - 4 + \pi$$

（4）拆项分部

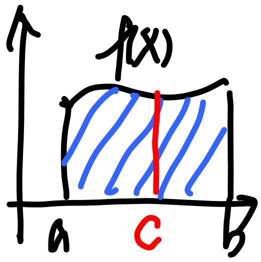
【例】$\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx =$ ____________.（《高等数学轻松学 P 112》）

$$原式 = \int \frac{\ln x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$d(\ln x)$

$$= \frac{1}{x} - \int \ln x \, d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{\ln x}{x} \cancel{- \frac{1}{x}} + C = -\frac{\ln x}{x} + C$$

三、求特殊的定积分



1.利用可加性 (分段函数)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

【例 1】设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\le 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 则 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=$__________.(《高等数学轻松学 P 139》)

$dx = d(t+2) = dt$

$$\int_1^3 f(x-2)dx \xlongequal{令\ x-2=t} \int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$= \int_{-1}^0 (1+t^2)dt + \int_0^1 e^{-t}dt$$

$$= \left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^0 + \left[-e^{-t}\right]_0^1$$

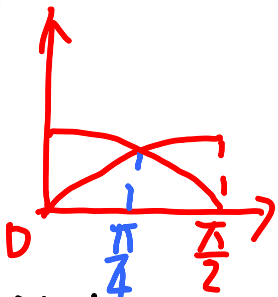
$$= -\left(-1-\frac{1}{3}\right) - (e^{-1}-1) = \frac{7}{3} - e^{-1}$$

【例 2】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x=$____________.

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-\cos x|\,dx$$

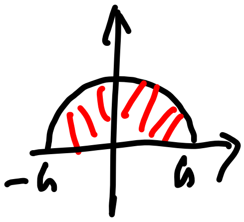


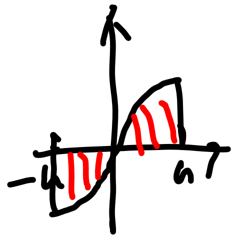
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)dx$$

$$= \left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2}-1+(-1)+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}-2.$$

2.利用对称性 "偶倍奇0"





$$\boxed{\int_{-a}^{a}} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{为偶函数},\\ 0, & f(x)\text{为奇函数}.\end{cases}$$

【例】（15-1）$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ________.

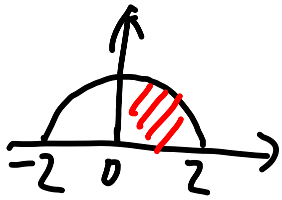
偶　奇

记 $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$，则 $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{1+\cos x}=-f(x)$

原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}$ ✓

3.利用几何意义

$y=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow x^2+y^2=4\ (y\geq 0)$



【例】 $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=$ $\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\pi$ ✓

- 一元积分学
  - 求不定积分、定积分、反常积分
  - 反常积分的收敛性
  - 定积分的应用
    - 基础题
    - 综合题
  - 变限积分问题
    - 变限积分的求导
    - 变限积分的极限
    - 变限积分等式问题
    - 综合题
  - 证明题
    - 证明积分等式
    - 证明积分不等式
      - 用微分学的方法
      - 用积分学的方法