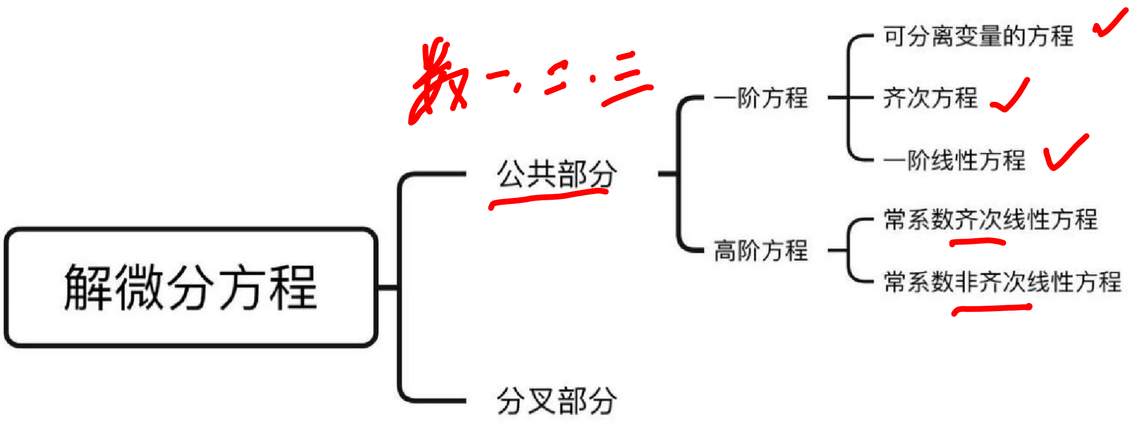
第四讲 解微分方程



一、微分方程的概念

$$F\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0 \Rightarrow y=y(x)$$

常微分方程的阶数 ＝ 方程中最高阶导数的阶数

‖

通解中独立的 C 的个数

‖

求特解时所需初始条件的个数

$$\begin{cases} \text{通解——含 } C \\ \quad \Big\downarrow \text{求出 } C \\ \text{特解——不含 } C \end{cases}$$

初始条件： $y\,|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$

二、一阶微分方程的求解 “对号入座”

解一阶方程前，先将 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 独立地置于等式一边，从而判断方程类型

1. 可分离变量的方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx$$

$$(xy)'=0 \Rightarrow xy=C$$

【例】（08-1,3）微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ $\frac{1}{x}$ ✓.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=-\ln x+\ln C$$

$$\Rightarrow \ln y=\ln\frac{C}{x} \Rightarrow y=\frac{C}{x} \qquad 由 y(1)=1 \Rightarrow C=1$$

2. 齐次方程 $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u) \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u \Rightarrow \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

【例】微分方程 $2xydy+(x^2-y^2)dx=0$ 满足条件 $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$ 的解是 $y=$ $\sqrt{3x-x^2}$ ✓

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\frac{y}{x}}$$

$$\xrightarrow{令\frac{y}{x}=u} u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-1}{2u} \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{-1-u^2}{2u} \Rightarrow \int\frac{2u}{1+u^2}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln(1+u^2)=-\ln x+\ln C \Rightarrow 1+u^2=\frac{C}{x} \Rightarrow 1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{C}{x} \Rightarrow x^2+y^2=Cx$$

$$由 y\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{3}{2} \Rightarrow \tfrac{9}{2}=\tfrac{3}{2}C \Rightarrow C=3 \qquad y^2=3x-x^2$$

3. 一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

【例 1】微分方程 $xy'=x^3+y$ 的通解为____________.

$P(x)$ $Q(x)$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^2$$

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int x^2e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=x\left(\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)$$

$$=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=Cx+\frac{1}{2}x^3$$

【例 2】（25-3）微分方程 $xy'-y+x^2\mathrm{e}^x=0$ 满足 $y(1)=-\mathrm{e}$ 的解为 $y=$ $-xe^x$.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-xe^x$$

$P(x)$ $Q(x)$

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(-xe^x\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}\right)dx+C\right]$$

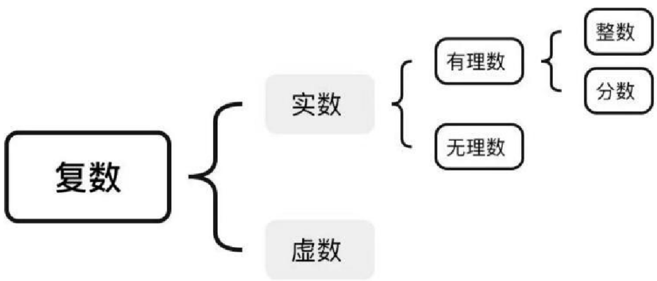
$$=x\left[\int\left(-xe^x\cdot\frac{1}{x}\right)dx+C\right]=x\left(-e^x+C\right)$$

由 $y(1)=-e\Rightarrow C=0$

三、高阶微分方程的求解

1. 高阶常系数齐次线性方程

【复数】如 $x^2=-1$，$x=\pm i$



对于 $r^2+pr+q=0$，若 $\Delta=p^2-4q<0$，则

$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}\ \mathrm{i}}{2}$$

（1） $y''+py'+qy=0$ （p,q **为常数**）

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根	$y''+py'+qy=0$ 的通解
两个单实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
二重实根 r	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

【例 1】（13-3） 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 $y=$ $(C_1+C_2x)e^{\frac{x}{2}}$ ✓

由 $r^2-r+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow (r-\frac{1}{2})^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=\frac{1}{2}$

【例 2】（17-1）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ $e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$

对于 $r^2+2r+3=0$，$\Delta=2^2-4\times3=-8<0$

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}i}{2}=-1\pm\sqrt{2}i$$

（2）$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$（$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数） 3-4阶

特征方程 $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$ 的根	$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$ 的通解
有 k 个单实根 $r_1,r_2,\cdots,r_k$	对应含有 k 项：$C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\cdots+C_ke^{r_kx}$
有 k 重实根 r	对应含有 k 项：$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$
有一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	对应含有 $2k$ 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

$(r-1)^3=0$

$(r^2+1)^2=0$

【例 1】微分方程 $y'''-2y''+y'=0$ 的通解为 $y=$ $C_1+(C_2+C_3x)e^x$

由 $r^3-2r^2+r=0 \Rightarrow r(r-1)^2=0$

$$\Rightarrow r_1=0,\ r_2=r_3=1$$

【例 2】（21-2）微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 $y=$ $C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

由 $r^3-1=0$

$\Rightarrow (r-1)(r^2+r+1)=0$

$\Rightarrow r_1=1,\ r_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

法一：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

法二：

$$\begin{array}{r} r^2+r+1 \\ r-1\overline{)\,r^3-1} \\ \underline{r^3-r^2} \\ r^2-1 \\ \underline{r^2-r} \\ r-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 2\overline{)\,39} \\ \underline{2} \\ 19 \\ \underline{18} \\ 1 \end{array}$$

2. 二阶常系数非齐次线性方程

若 y^* 为非齐次线性方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解，Y 是该方程对应的齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，则 $\boxed{y=Y+y^*}$ 就是该方程的通解.

① $m=?$
② $\lambda=?$ → 求 $x^0/x^1/x^2$?

（1）$y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$（$p,q,\lambda$ 为常数，$P_m(x)$ 为 x 的一个 m 次多项式）

待定 $m+1$ 个系数

λ 与特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的关系	特解 y^* 的设法
λ 不是 $r^2+pr+q=0$ 的根	设 $y^*=e^{\lambda x}(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$
λ 是 $r^2+pr+q=0$ 的单根	设 $y^*=xe^{\lambda x}(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$
λ 是 $r^2+pr+q=0$ 的重根	设 $y^*=x^2e^{\lambda x}(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)$

【例】微分方程 $y''-y=xe^x$ 的通解为____________.　　$P_m(x)=x$　　$\lambda=1$

对于 $y''-y=0$，由 $r^2-1=0 \Rightarrow r_1=1, r_2=-1$　　$Y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

设 $y^*=xe^x(ax+b)=e^x(ax^2+bx)$ ✓

$y^{*\prime}=e^x(ax^2+bx)+e^x(2ax+b)=e^x[ax^2+(2a+b)x+b]$

$y^{*\prime\prime}=e^x[ax^2+(2a+b)x+b]+e^x(2ax+2a+b)$

$=e^x[\cancel{ax^2}+(4a+\cancel{b})x+2a+2b]$ ✓

$\cancel{e^x}(4ax+2a+2b)=x\cancel{e^x}$　　由 $\begin{cases}4a=1\\2a+2b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$

故 $y^*=\frac{1}{4}xe^x(x-1)$. 从而 $y=\underbrace{c_1e^x+c_2e^{-x}}_{Y}+\underbrace{\frac{1}{4}xe^x(x-1)}_{y^*}$

【练 1】$y''-2y'+y=xe^{x}$　　$y^*=x^2e^x(ax+b)$　　$m=1$　$\lambda=1$

$r^2-2r+1=0$

【练 2】$y''-2y'+y=x^2+1$　　$y^*=ax^2+bx+c$　　$m=2$　$\lambda=0$

（2）$y''+py'+qy=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$（$P_l(x)$ 和 $Q_n(x)$ 分别为 x 的一个 l 和 n 次多项式，p,q,λ,ω 为常数）

① $l=?,\ n=?\to m=?$

② $\lambda=?,\ w=?\to$ 乘 x^0/x^1?

待定 $2m+2$ 个系数

$\lambda+\mathrm{i}\omega$ 与特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的关系	特解 y^* 的设法（$m=\max\{l,n\}$）
$\lambda+\mathrm{i}\omega$ 不是 $r^2+pr+q=0$ 的根	设 $y^*=e^{\lambda x}[(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)\cos wx+(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)\sin wx]$
$\lambda+\mathrm{i}\omega$ 是 $r^2+pr+q=0$ 的根	设 $y^*=xe^{\lambda x}[(b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m)\cos wx+(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m)\sin wx]$

【例】（03-1,2） 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

（1）试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

$y''-y=\sin x$

（2）求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

$Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$l=0,\ n=0\to m=0$

$\lambda=0,\ w=1$

设 $y^*=A\cos x+B\sin x$ ✓

$y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$，$y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$ ✓

$-2A\cos x-2B\sin x=\sin x$，得 $A=0$，$B=-\frac{1}{2}$　　故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$.

$y=\underbrace{\boxed{C_1e^x+C_2e^{-x}}}_{Y}\underbrace{-\frac{1}{2}\sin x}_{y^*}$.　　$y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x$

由 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1-C_2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=-1\end{cases}$　　故 $y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$.

【叠加原理】

若 y_1^* 和 y_2^* 分别为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 和 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解，则

$y_1^*+y_2^*$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ 的特解.

【例】（17-2）微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$（ C ）

（A） $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

（B） $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

（C） $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

（D） $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

$r^2-4r+8=0$

$\Rightarrow r_{1,2}=\frac{4\pm 4i}{2}$

$=2\pm 2i$

$m=0 \quad \lambda=2$

对于 $y''-4y'+8y=e^{2x}$，$y_1^*=Ae^{2x}$

对于 $y''-4y'+8y=e^{2x}\cos 2x$，$y_2^*=xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

$l=0,\ n=0 \rightarrow m=0$

$\lambda=2,\ w=2$