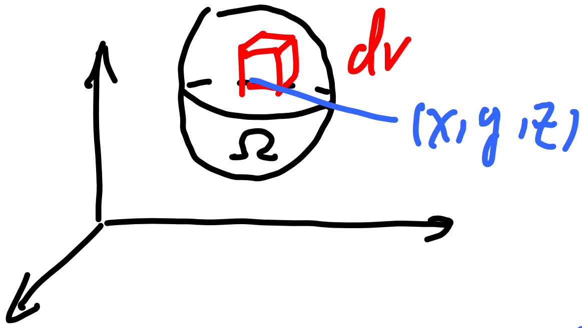
二、三重积分（仅数一）　$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$

1. 概念 (非均匀的空间体的质量)

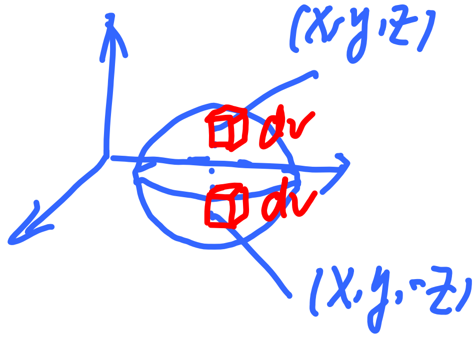


$$M=\iiint\limits_{\Omega}\underbrace{f(x,y,z)}_{\text{密度}}\,\underline{\mathrm{d}v}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=V_{\Omega}$$

2. 对称性

$$+\begin{cases} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v \\ f(x,y,-z)\,\mathrm{d}v \end{cases}$$



（1）普通对称性

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases} 0, & \begin{cases} f(x,y,-z)=-f(x,y,z), \\ \Omega\text{关于}xOy\text{面对称}, \end{cases} \\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & \begin{cases} f(x,y,-z)=f(x,y,z), \\ \Omega\text{关于}xOy\text{面对称}, \end{cases} \end{cases}$$

yOz 面　x
zOx 面　y

其中 Ω_1 为 Ω 在 xOy 面一侧的部分.同理可得另外两种情况.

（2）轮换对称性

$$\iiint f(x,y,z)\mathrm{d}v \overset{?}{=} \iiint f(y,x,z)\mathrm{d}v$$

$$\boxed{\Omega_{xyz}} = \boxed{\Omega_{yxz}}$$

若把 x,y 对调后 Ω 不变,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)\mathrm{d}v .$$

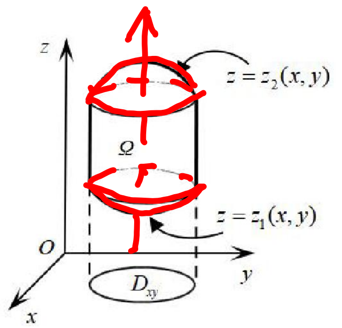
同理可得另外两种情况.

3. 计算（直角坐标/柱面坐标）

把三重积分化为“二重积分+一元积分”.

1）先一后二法（投影法/穿线法）

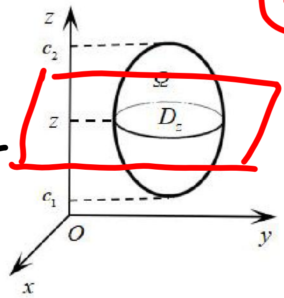
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$



2）先二后一法（截面法）

$z=z$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$



① D_z ②

当竖坐标为 z 的平面截积分区域所得的平面区域为圆、三角形，且被积函数仅含 z 时，优先考虑先二后一法

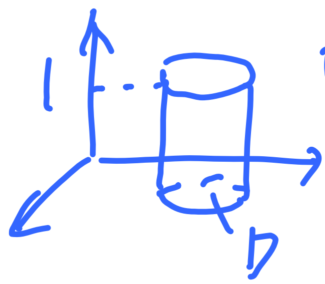
如

$$\int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(z)dxdy$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(z)dxdy\right] dz$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(z)\left(\iint_{D_z} 1\,dxdy\right) dz \quad = S_{D_z}$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(z)\cdot S_{D_z}\,dz$$



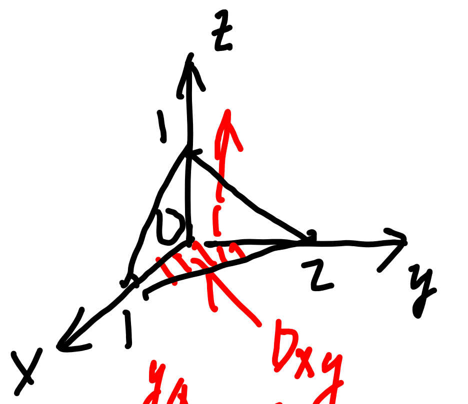
$f(x,y)=1$

$$\iint_D d\sigma = S_D$$

$z=1-x-\frac{y}{2}$

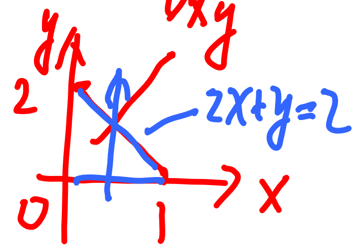
【例】设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)\mathrm{d}v$.

$$\iiint_\Omega dv = V_\Omega = \frac13\times\left(\frac12\times1\times2\right)\times1=\frac13$$



法一：$\iiint_\Omega x\,dv = \iint_{\boxed{D_{xy}}} dx\,dy\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1-x-\frac y2}} x\,dz$

$$=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} dx\int_{\boxed{0}}^{\boxed{2-2x}}dy\int_0^{1-x-\frac y2} x\,dz$$



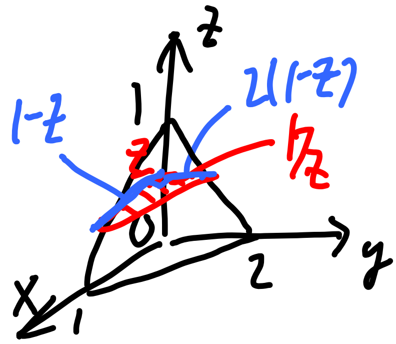
$$=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}\left(x-x^2-\frac12 xy\right)dy$$

$$=\int_0^1\left[(x-x^2)y-\frac14 xy^2\right]_0^{2-2x}dx$$

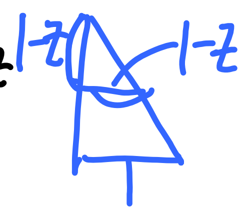
$$=\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac14x^4-\frac23x^3\right]_0^1=\frac1{12}$$

法二：由于互换 x, z 后 Ω 不变，故

$$\iiint_\Omega x\,dv=\iiint_\Omega z\,dv=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{1}} dz\iint_{\boxed{D_z}} z\,dx\,dy$$ S_{D_z}



$$=\int_0^1\left(\iint_{D_z} z\,dx\,dy\right)dz=\int_0^1 z\left(\iint_{D_z}1\,dx\,dy\right)dz$$



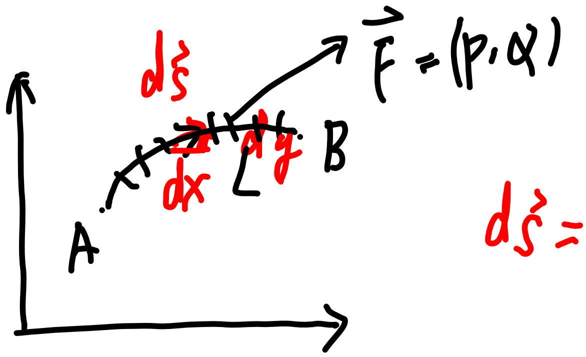
$$=\int_0^1 z\,\cancel{\frac12}(1-z)\cdot\cancel{2}(1-z)\,dz=1/12$$

【注】$V_{柱}=S_{底}\cdot h, V_{锥}=\frac13 S_{底}\cdot h$

故原式 $=\frac13+2\times\frac1{12}=\frac12$

三、求第二类曲线积分（仅数一）　$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

1. 概念 (变力做功)



$d\vec{s}=(dx,dy)$

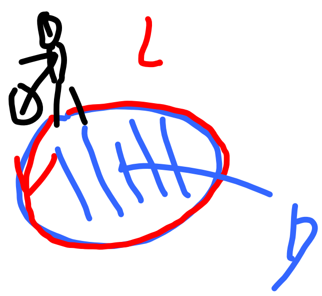
$$W=\int_L P\,dx+Q\,dy$$

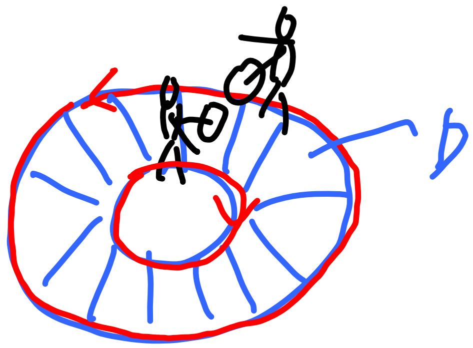
2. 格林公式

$$\begin{cases}1)L\text{封闭，且为}D\text{ 的正向边界曲线,}\\ 2)P,Q\text{在}D\text{上具有一阶连续偏导数}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

【注】L 的正向规定如下：当观察者沿 L 的这个方向行走时，D 内在他近处的那一部分总在他的左边



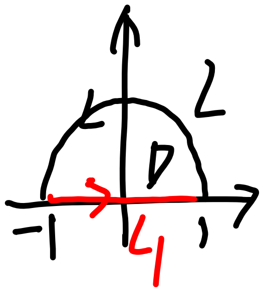


【例】（25-1）已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的一段，则曲线积分 $\int_L (y+\cos x)\mathrm{d}x+(2x+\cos y)\mathrm{d}y=$________.

记 $P=y+\cos x$，$Q=2x+\cos y$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2-1=1$.

补 $L_1: y=0$（x 由 -1 变到 1），

设 D 由 L 与 L_1 围成



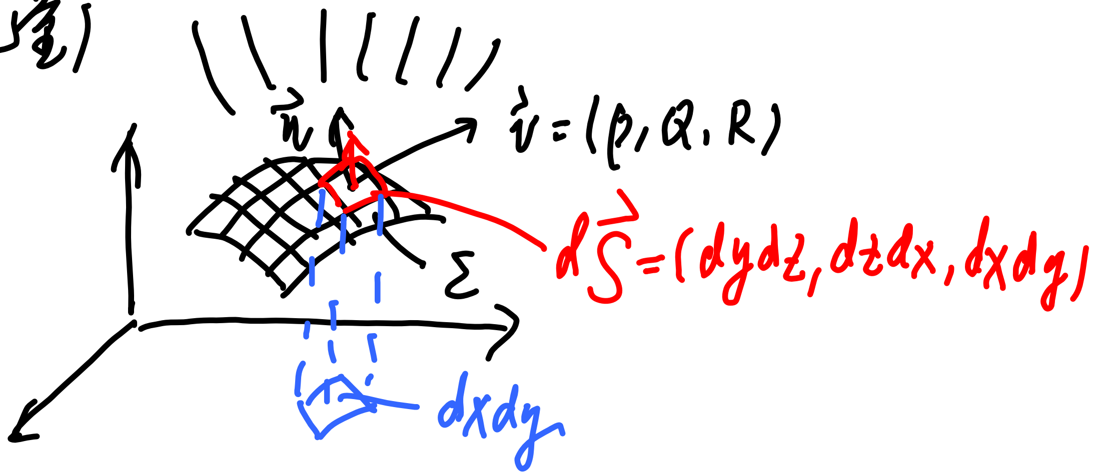
原式 $=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}$

$$\oint_{L+L_1}=\iint_D 1\,d\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{1-x^2}dy=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

$$\int_{L_1}=\int_{-1}^{1}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_{-1}^{1}=2\sin 1$$ 故原式 $=\frac{4}{3}-2\sin 1$

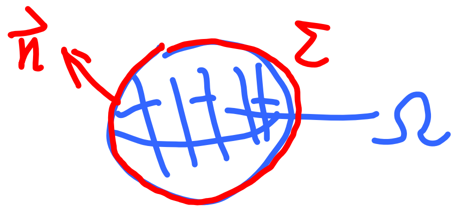
四、求第二类曲面积分（仅数一）$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1. 概念（流量）



$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

2. 高斯公式



$$\begin{cases}1)\Sigma\text{封闭,且为}\Omega\text{边界曲面的外侧}\\2)P,Q,R\text{在}\Omega\text{上具有一阶连续偏导数}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

【例】(16-1) 设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\underbrace{(x^2+1)}_{P}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\underbrace{-2y}_{Q}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\underbrace{3z}_{R}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$I=\iiint_{\Omega}(2x-2+3)dV=\frac{1}{2}$$