

二、三重积分（仅数一） $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$

1. 概念

2. 对称性

(1) 普通对称性

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 0, & \begin{cases} f(x, y, -z) = -f(x, y, z), \\ \Omega \text{关于} xOy \text{面对称}, \end{cases} \\ 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, & \begin{cases} f(x, y, -z) = f(x, y, z), \\ \Omega \text{关于} xOy \text{面对称}, \end{cases} \end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 在 xOy 面一侧的部分. 同理可得另外两种情况.

(2) 轮换对称性

若把 x, y 对调后 Ω 不变, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dv.$$

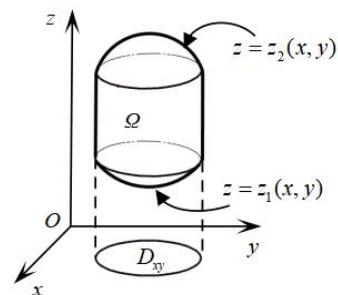
同理可得另外两种情况.

3. 计算（直角坐标/柱面坐标）

把三重积分化为“二重积分+一元积分”.

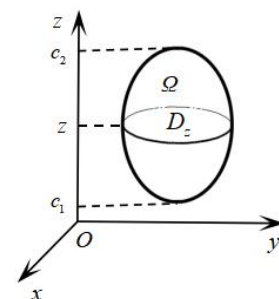
1) 先一后二法

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv =$$



2) 先二后一法

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv =$$



当竖坐标为 z 的平面截积分区域所得的平面区域为圆、三角形，且被积函数仅含 z 时，优先考虑先二后一法

【例】设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (2x + 1) dv$.

【注】 $V_{\text{柱}} = S_{\text{底}} \cdot h, V_{\text{锥}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h$

三、求第二类曲线积分（仅数一） $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

1. 概念

2. 格林公式

- 1) L 封闭, 且为 D 的正向边界曲线,
- 2) P, Q 在 D 上具有一阶连续偏导数

$$\Rightarrow \oint_L Pdx + Qdy =$$

【注】 L 的正向规定如下：当观察者沿 L 的这个方向行走时， D 内在他近处的那一部分总在他的左边

【例】(25-1) 已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y = 1 - x^2$ 从点 $(1, 0)$ 到点 $(-1, 0)$ 的一段, 则曲线积分 $\int_L (y + \cos x)dx + (2x + \cos y)dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、求第二类曲面积分(仅数一) $\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy$

1. 概念

2. 高斯公式

- $$\begin{cases} 1) \Sigma \text{ 封闭, 且为 } \Omega \text{ 边界曲面的外侧} \\ 2) P, Q, R \text{ 在 } \Omega \text{ 上具有一阶连续偏导数} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy =$$

【例】(16-1) 设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$.

