

2026 考研数学零基础讲义

主讲老师 高幂

第一章 函数、极限、连续

【大纲要求】

1. 理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 并会建立应用问题中的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念, 理解函数左极限与右极限的概念, 以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念, 掌握无穷小量的比较方法, 会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续), 会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性, 理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理), 并会应用这些性质.

第一节 函数

知识点 1 函数的三要素

定义 1 若 D 为一个非空实数集合, 设有一个对应法则 f , 使得对每一个 $x \in D$ 都有一个确定的实数 y 与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个**函数**关系, 或称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, 集合 D 称为函数的**定义域**, 也可以记作 $D(f)$. 对于 $x_0 \in D$ 所对应的 y 的值, 记作 y_0 或 $f(x_0)$, 称为当 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的**函数值**.

全体函数值组成的集合 $\{y | y = f(x), x \in D\}$, 称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**, 记作 $f(D)$.

例 1 求 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的定义域.

例2 下列函数对中，两函数相等的是（ ）

(A). $e^{\ln x}$ 与 x

(B). $\ln(1+x) + \ln(1-x)$ 与 $\ln(1-x^2)$

(C). $\sqrt{x(x+1)}$ 与 $x\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

(D). $\sqrt{x^2+2x+1}$ 与 $x+1$

知识点2 反函数

定义2 设 $y = f(x)$ 为定义在 D 上的一个函数，其值域为 $f(D)$ 。如果对于每一个 $y \in f(D)$ ，

都有一个**唯一**确定的 x 使得 $f(x) = y$ 与之对应，我们就将该对应法则记作 f^{-1} ，这个定义

在 $f(D)$ 上的函数 $x = f^{-1}(y)$ 就称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数。

例3 求 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的反函数。

例4 (1) 求 $y = \arcsin(\sin x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(2) $y = \arcsin(\sin x), x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 。

知识点3 复合函数

定义3 设 $y = f(u), u \in D_1$ 与 $u = g(x), x \in D_2$ 为两个函数，如果 $g(x)$ 的值域 $g(D_2)$ 包含于

$f(u)$ 的定义域 D_1 ，则可以定义 $y = f(g(x)), x \in D_2$ 为函数 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的**复合函数**，记

作 $y = f(g(x))$ 或 $f \circ g$.

重要考点：分段函数的复合

常见分段函数

$$\textcircled{1} \text{ 符号函数: } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ 绝对值函数: } y = |f(x)|;$$

$$\textcircled{3} \text{ 取整函数: } y = [f(x)];$$

$$\textcircled{4} \text{ 最大值函数: } y = \max\{f(x), g(x)\};$$

$$\textcircled{5} \text{ 最小值函数: } y = \min\{f(x), g(x)\};$$

取整函数的常用结论:

$$x-1 < [x] \leq x; [x+n] = [x] + n; n[x] \leq nx; [x+y] \geq [x] + [y].$$

例 5 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $f(x)$.

例 6 设 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x+x^3}{1+x^4}$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 且满足 $2f(x) + x^2 f(\frac{1}{x}) = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. 求 $f(x)$.

例 8 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0, \\ 2x & x < 0, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$.

例 9 (2001—2) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\} =$

(A) 0. (B) 1. (C) $\begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$.

例 10 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$. 求 $f[g(x)]$.

定义 4 幂函数，指数函数，对数函数，三角函数与反三角函数称为**基本初等函数**.

1. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 常数).

(2) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$ 常数), $y = e^x$ ($e = 2.7182\cdots$, 无理数).

(3) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$ 常数).

常用对数 $y = \log_{10} x = \lg x$, 自然对数 $y = \log_e x = \ln x$.

常用的对数性质: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; $\log_a x^m = m \log_a x$.

我们常说的“e 抬起法”就是基于指数与对数的关系给出的.

“e 抬起法”: $u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x) \ln u(x)}$ ($u(x) > 0$).

(4) 三角函数 $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \tan x$; $y = \cot x$; $y = \sec x$; $y = \csc x$

三角函数的诱导公式，倍角半角公式，和差化积，积化和差公式都要求大家熟记.

(5) 反三角函数 $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \arctan x$; $\operatorname{arccot} x$.

熟记基本初等函数的概念，性质及其图像.

2. 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和复合运算得到的可以用一个式子来表达的函数称为初等函数.

知识点3 函数的特性

定义 5 对于函数 $y = f(x), x \in D$, 如果在某区间 I 内的任意两点 $x_1 > x_2$ 都满足 $f(x_1) > f(x_2)$ (或 $f(x_1) < f(x_2)$), 就称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调递增** (或**单调递减**), 相应地称 I 是 $f(x)$ 的一个**单调增区间** (或**单调减区间**). 如果对区间 I 内的任意两点 $x_1 > x_2$ 都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \leq f(x_2)$), 我们就称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调不减** (或**单调不减**).

单调性 1) 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 若 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增. 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 若 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减.

判断: 若 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增, 且在区间 I 上可导, 则 $f'(x) > 0$.

2) 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 若 $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在区间 I 上单调不减.

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 若 $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在区间 I 上单调不减.

定义 6 对于函数 $y = f(x), x \in D$, 如果存在正数 T , 使得对函数 $y = f(x)$ 在其定义域 D 内的任意一点 x 都有 $f(x \pm T) = f(x)$, 就称 $f(x)$ 是一个**周期函数**, 而 T 是 $f(x)$ 的一个**周期**. 易知如果 T 是 $f(x)$ 的一个周期, 那么对任意的正整数 n , nT 都是 $f(x)$ 的周期. 在 $f(x)$ 的所有周期中, 我们把其中最小的称为**最小正周期**.

注: 常见周期函数:

$$y = \sin x, \quad T = 2\pi; \quad y = \cos x, \quad T = 2\pi$$

$$y = \tan x, \quad T = \pi; \quad y = \cot x, \quad T = \pi$$

$$y = \sin^2 x, \quad T = \pi; \quad y = \cos^2 x, \quad T = \pi$$

定义 7 对于函数 $y = f(x), x \in D$, 如果对其定义域 D 内的任意一点 x , 都有 $f(-x) = f(x)$

(或 $f(-x) = -f(x)$), 就称 $f(x)$ 是一个**偶函数** (或**奇函数**).

注: 1) 常见的奇函数:

$$y = x^k, k \text{ 为奇数}, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x, y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$F(x) = f(-x) - f(x), f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

2) 常见的偶函数:

$$y = x^k, k \text{ 为偶数}, y = \cos x, y = |x|, F(x) = f(x) + f(-x)$$

定义 8 设 $y = f(x), x \in D$ 是一个函数, 如果存在一个实数 M , 使得对定义域 D 内任意的一点 x , 都有 $f(x) \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 内有上界, 并称 M 是函数 $f(x)$ 在 D 内的一个上界; 如果存在一个实数 m , 使得对定义域 D 内任意的一点 x , 都有 $f(x) \geq m$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 内有下界, 并称 m 是函数 $f(x)$ 在 D 内的一个下界. 如果存在正数 M , 使得对定义域 D 内任意的一点 x , 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界.

注: 1) 函数 $f(x)$ 在 D 内有界当且仅当 $f(x)$ 在 D 内有上界且有下界.

2) 常见的有界函数:

$$f(x) = \sin x, \quad |f(x)| \leq 1$$

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \quad |f(x)| \leq 1$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \arcsin x, x \in [-1, 1] \quad |f(x)| \leq \frac{\pi}{2}$$

例 11 讨论函数下列函数在其定义域内的有界性:

$$\frac{x}{1+x^2}, \sin\left(\frac{e^x}{x+1}\right), x \sin x, f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}.$$

例 12 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是 ()

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

第二节 数列极限

知识点 1 数列极限的定义及性质

定义 1 对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在实数 a , 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 一个正整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

数列基本性质

1) 数列极限的基本性质

(1) 唯一性 若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则其极限值唯一.

(2) 有界性 若数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界.

(3) 保号性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, 则存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$;

保号性也可以有如下等价的表述方式: 假设存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, $x_n \geq 0$,

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$.

知识点 2 数列极限的四则运算

极限的四则运算: 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = AB, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

知识点 3 数列极限存在准则

准则 1 夹逼定理

如果数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足下列条件:

1) 从某项起, 即 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $y_n \leq x_n \leq z_n$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

准则 2 单调有界原理 单调有界数列必有极限.

例 1 求下列极限

(1) (1990) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) (2006-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

例2 求下列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1} \right)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \frac{3}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$

(4) (1995-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

例3 求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |2x|^n + x^{2n}}.$

例4 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是 ().

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a.$

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a.$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

例5 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有 ()

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$.
 (C) $a_n > a - \frac{1}{n}$. (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.

例6 (1991) 设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$ 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是

- (A) 无穷大量. (B) 无穷小量.
 (C) 有界变量. (D) 无界变量.

例7 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有 ()

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
 (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

例8 (1998-2) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是 ()

- (A) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散.
 (B) 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界.
 (C) 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.
 (D) 若 $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

第三节 函数极限

知识点 1 函数极限的定义及性质

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义, 如果存在实数 A , 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 一个正数 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点处的极限值为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某左邻域内有定义, 如果存在实数 A , 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 一个正数 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点处的左极限为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

类似地, 可以定义右极限.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, X) \cup (X, +\infty)$ 上有定义 (X 为某正数), 如果存在实数 A , 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 一个正数 $M > 0$, 当 $|x| > M$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的极限值为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, X)$ 上有定义 (X 为某正数), 如果存在实数 A , 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 一个正数 $M > 0$, 当 $x < -M$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称当 $x \rightarrow -\infty$ 时 $f(x)$ 的极限值为 A , 记作 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

类似地, 可以定义 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

定义 3 如果在某极限过程 $x \rightarrow \square$ 中 ($x \rightarrow \square$ 可以表示上述七种极限过程中的任何一种, 下同), 函数 $f(x)$ 的极限值为 0, 也即 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow \square$ 时的无穷小量.

定义 4 如果在某极限过程 $x \rightarrow \square$ 中, 函数 $f(x)$ 的函数值无限增大, 则称函数 $f(x)$ 为该极限过程中的无穷大量. 具体地说:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \text{ 一个正数 } \delta > 0, \text{ 当 } |x - a| < \delta \text{ 时, 恒有 } |f(x)| > M.$$

例 1 计算下列函数极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - 2x - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$$

注：(1) (2) (3) 的结论可以作如下总结和推广：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, m = n \\ 0, m > n \\ \infty, m < n \end{cases} \quad \text{其中 } a_n, b_m \neq 0.$$

【定理 1.1】 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在当且仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在且相等.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在当且仅当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 存在且相等.

例 2 求下列极限

$$(1) (1997-2) \text{ 求极限 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$$

$$(2) (1992-3) \text{ 当 } x \rightarrow 1 \text{ 时, 函数 } \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} \text{ 的极限 ()}$$

(A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

$$(3) (2003-1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$$

2) 函数极限的基本性质

(1) 唯一性 若函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则其极限值唯一.

(2) 有界性 若函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则存在正数 $\delta > 0$, 使得函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内有界.

(3) 保号性 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, 则 $\exists$ 正数 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$.

保号性也可以有如下等价的描述方式: 若 $\exists$ 正数 $\delta > 0$, 使得当

$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x) \geq 0$, 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.

例4(1998-2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续, 且 $f(a)$ 为其极大值, 则存在 $\delta > 0$,

当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 时, 必有

()

(A) $(x-a)[f(x) - f(a)] \geq 0$.

(B) $(x-a)[f(x) - f(a)] \leq 0$.

(C) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t-x)^2} \geq 0 (x \neq a)$.

(D) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t-x)^2} \leq 0 (x \neq a)$.

例5(1987-1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在 $x=a$ 处

()

(A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$.

(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

知识点2 函数极限的四则运算

极限的四则运算: 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则有:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = A + B, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$$

例6 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不存在, $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ 不存在, 有以下命题:

① $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ 不存在.

② $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) + h(x)]$ 不存在.

③ $\lim_{x \rightarrow a} [h(x) \cdot g(x)]$ 不存在.

④ $\lim_{x \rightarrow a} [g(x) + f(x)]$ 不存在.

则以上命题中正确的个数是

()

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

例 7 (2000-3) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$,

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ()

- (A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定零 (C) 一定不存在 (D) 不一定存在

例 8 设对任意的 x , 总有 $f(x) \leq a \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ()

- (A) 存在且等于 a (B) 存在但不一定为 a (C) 一定不存在 (D) 不一定存在

定义 5 无穷小

以 0 为极限的量. 也即, 如果 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$, 则称 $x \rightarrow \square$ 时 $f(x)$ 为无穷小.

定义 6 设在某极限过程 $x \rightarrow \square$ 中, 函数 $\alpha(x), \beta(x)$ 都为无穷小量, 并且都不为 0.

如果 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称当 $x \rightarrow \square$ 时, $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小量, 或 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的

低阶无穷小量, 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

如果 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 则称当 $x \rightarrow \square$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 同阶无穷小量;

如果 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称当 $x \rightarrow \square$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小量, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

如果 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0$ ($k > 0$), 则称当 $x \rightarrow \square$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

注: 等价无穷小量性质: $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ (反身性); $\alpha(x) \sim \beta(x) \Rightarrow \beta(x) \sim \alpha(x)$ (对称性);

$\alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x) \Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x)$ (传递性).

1) 无穷小的常见性质

- (1) 有限个无穷小量之和或乘积仍为无穷小量;
- (2) 无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量.

【定理 1.2】若存在正整数 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $x_n \leq y_n \leq z_n$ 成立, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

【定理 1.3】若存在正数 δ , 对于任意满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x 都有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$,

$$\text{且 } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

2) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

3) 常见的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x, & \tan x &\sim x, & \arcsin x &\sim x, & \arctan x &\sim x, \\ 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2, & e^x - 1 &\sim x, & a^x - 1 &\sim x \cdot \ln a, & \ln(1+x) &\sim x, \\ x - \ln(1+x) &\sim \frac{1}{2}x^2, & (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x, & x - \sin x &\sim \frac{1}{6}x^3 \sim \arcsin x - x, \\ \tan x - x &\sim \frac{1}{3}x^3 \sim x - \arctan x, & \tan x - \sin x &\sim \frac{1}{2}x^3 \sim \arcsin x - \arctan x. \end{aligned}$$

4) 等价无穷小替换求极限

【定理】设 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

洛必达法则

(1) $x \rightarrow a$ 情况

设 $f(x), g(x)$ 满足

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

$$\text{ii) } f(x), g(x) \text{ 在 } a \text{ 的领域内可导 (} a \text{ 点除外) 且 } g'(x) \neq 0$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在或为 } +\infty \text{ 或 } -\infty.$$

$$\text{则有 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(2) $x \rightarrow \infty$ 情况

设 $f(x), g(x)$ 满足

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

ii) 存在一个正数 X , 当 $|x| > X$ 时有 $f(x), g(x)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$

iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

例 9 计算下列函数极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$

(3) (2004-2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$

(4) (2003—1) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, b > 0, c > 0)$.

例 10 下列各题计算过程中正确无误的是

()

(A) 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)'}{n'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

(B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \sin \pi x}{6} = 0.$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \cdot \frac{1}{x}$ 不存在.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \infty.$

例 11 计算下列函数极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} =$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$

(3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$

(4) (2007—3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x)$

例 12 (2001—2) $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是

比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于

(A).1

(B).2

(C).3

(D).4

例 13 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是 x 的 () 无穷小.

- (A) 1 阶. (B) 2 阶. (C) 3 阶. (D) 4 阶.

泰勒公式

定理 1 (佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 都有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)(x \rightarrow x_0),$$

其中 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)(x \rightarrow x_0)$ 称为佩亚诺余项.

求极限的方法中用泰勒公式就是这种情形, 根据不同情形取适当的 n , 所以对常用的初等函数如 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 和 $(1+x)^\alpha$ (α 为实常数) 等的 n 阶泰勒公式都要熟记.

注: 当 $x_0 = 0$ 时, n 阶泰勒公式也称为 n 阶麦克劳林公式.

需要记住以下五个泰勒展开式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)x^n}{n!} + o(x^n).$$

例 12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 1 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}.$

函数极限的应用之

曲线的渐近线

1) . 垂直渐近线 ($x = a$)

如果函数在 $x = a$ 处的左右极限中至少有一个等于 $+\infty$ 或 $-\infty$ ，则称 $x = a$ 为曲线的垂直渐近线.

2) . 水平渐近线 ($y = a$)

如果有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ ，则称 $y = a$ 为曲线的水平渐近线.

3) . 斜渐近线 ($y = kx + b$)

如果有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (kx + b) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (kx + b) = 0$ ，则称 $y = kx + b$ 为曲线的斜渐近线.

求函数斜渐近线的方法:

i) . 计算 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$; ii) . 再计算 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$

例 1 曲线 $y = \frac{x + 4 \sin x}{5x - 2 \cos x}$ 的水平渐近线方程为

例 2 (2012-123) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

例 3 (2007-123) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为 ()

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

例 4 (2010-2) 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为 _____.

例 5 (2005-2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____.

第四节 函数的连续性

【定义 1.1】 假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数

$f(x)$ 在 x_0 点处连续.

假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某右邻域内有定义, 并且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点

处右连续.

类似地, 我们还可以定义左连续.

例 1 (1997—2) 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

例 2 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____

【定义 1.2】 假设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有定义, 如果 $f(x)$ 在 (a, b) 上每一点都连续,

则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上连续.

假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内有定义, 如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上连续, 并且 $f(x)$ 在

$x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

类似地, 我们可以得到函数在区间 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 上连续的定义.

【定义 1.3】 假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 并且函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续, 则

称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

【定义 1.4】 假设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 均存在, 则称 x_0 为

函数 $f(x)$ 的第一类间断点; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 至少有一个不存在, 则称 x_0 为函数

$f(x)$ 的第二类间断点.

在第一类间断点中, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点; 如果

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

在第二类间断点中, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 至少有一个为 ∞ , 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点;

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 均不为 ∞ , 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的振荡间断点.

例 3 (2005-2) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则 ()

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

例 4 (2009-3) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为: ()

(A). 1 (B). 2 (C). 3 (D). 无穷多个

例 5 (2003-2): 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; a 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

例 6 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 则下列结论成立的是 ()

(A) $f(x)$ 无间断点.

(B) $f(x)$ 有间断点 $x=1$.

(C) $f(x)$ 有间断点 $x=0$.

(D) $f(x)$ 有间断点 $x=-1$.

例 7 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin t}{x} \right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

(A) 连续.

(B) 有可去间断点.

(C) 有跳跃间断点.

(D) 有无穷间断点.

2. 基本性质

1) 连续函数的四则运算

【定理 1.4】设 $f(x), g(x)$ 均在某区间 I 上连续, 则函数 $k_1 f(x) + k_2 g(x), (k_1, k_2 \in R)$,

$f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$ 都在 I 上连续

2) 复合函数的连续性

【定理 1.5】设 $y = f(u), u \in D; u = g(x), x \in I$ 均在其定义域上连续, 且有 $g(I) \subseteq D$, 则

$y = f(g(x))$ 是 I 上的连续函数.

3) 反函数的连续性

【定理 1.6】设 $y = f(x), x \in I$ 是 I 上的连续函数, $y = f^{-1}(x), x \in f(I)$ 是它的反函数,

则 $y = f^{-1}(x), x \in f(I)$ 是 $f(I)$ 上的连续函数.

4) 初等函数的连续性

【定理 1.7】一切初等函数都在其定义域内连续.

5) 闭区间上连续函数的性质

定理 1 (最值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m .

推论: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上有界.

定理 2 (介值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且其最大值和最小值分别

为 M 和 m ，则对于介于 m 和 M 之间的任何实数 c ，在 $[a, b]$ 上至少存在一个 ξ ，使得 $f(\xi) = c$ 。

即：闭区间上的连续函数必取得介于最大值和最小值之间的一切函数值。

定理 3（介值定理 2）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且在区间端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$ ，则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C ，在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ ，使得 $f(\xi) = C$ 。

定理 4（零点定理）如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$ ，则在 (a, b) 内至少存在一个点 ξ ，使得 $f(\xi) = 0$ 。

零点定理常用于证明方程根的存在或者函数零点存在问题。

第二章 一元函数微分学

【大纲要求】

1. 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程（了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量——数学一、数学二），（经济意义包含边际与弹性的概念——数学三），理解函数的可导性与连续性之间的关系。

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式。了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数（数农只要求二阶导数）。

4. 会求分段函数的导数，会求隐函数以及反函数的导数。

5. 理解并会用罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理和泰勒（Taylor）定理，了解并会用柯西（Cauchy）中值定理。（理解罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理；了解泰勒定理、柯西（Cauchy）中值定理，掌握这四个定理的简单应用——数学三；农学数学只要求掌握罗尔定理和拉格朗日中值定理及这两个定理的简单应用）。

6. 掌握（会——数学三、数农）用洛必达法则求未定式极限的方法。

7. 理解函数的极值概念, 掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法, 掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性(注: 在区间 (a, b) 内, 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数. 当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凹的; 当 $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凸的), 会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线, 会描绘函数的图形.

9. 了解曲率、曲率圆和曲率半径的概念, 会计算曲率和曲率半径. (数学一、数学二)

第一节 可导与可微

1. 基本概念

【定义 2.1】设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 给自变量 x 在 x_0 处加上增量 $\Delta x (\neq 0)$, 相应的得到因变量 y 的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称函数在 x_0 处可导, 该极限值称为函数在 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$.

导数的定义式还可以写成 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

【定义 2.2】设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义, 如果极限

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数存在, 该

极限值称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数, 记作 $f'_-(x_0)$.

类似地, 可以定义函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数 $f'_+(x_0)$.

例 1 (1999-1) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 极限不存在. (B) 极限存在, 但不连续.

(C) 连续, 但不可导. (D) 可导.

例 2 (1994-2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的 ()

- (A) 左、右导数都存在. (B) 左导数存在, 但右导数不存在.
(C) 左导数不存在, 但右导数存在. (D) 左、右导数都不存在.

例 3 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于 ()

- (A) $f'(a)$. (B) $2f'(a)$. (C) 0. (D) $f'(2a)$.

【定义 2.3】 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导, 且在 $x=a$ 处存在右导数, 在 $x=b$ 处存在左导数, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

【定义 2.4】 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的领域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处有增量 $\Delta x (\neq 0)$ 时, 如果因变量 y 的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0$$

其中 A 为只与 x_0 有关而与 Δx 无关的常数, $o(\Delta x)$ 表示 Δx 的高阶无穷小量 (回忆高阶无穷小量的定义), 则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的线性主要部分, 即线性主部, 也称为微分, 记作 dy 或 $df(x)$, 即 $dy = df(x) = A\Delta x$.

2. 基本性质

1) 左右导数与导数的关系

【定理 2.1】函数 $f(x)$ 在 x_0 的导数存在的充要条件是该点的左右导数存在且相等.

2) 可导、可微、连续的相互关系

【定理 2.2】设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 那么 $f(x)$ 在 x_0 处必然连续.

【定理 2.3】可微必可导, 可导必可微.

3) 初等函数的可导性

【定理 2.4】一切初等函数在其定义域内 (除端点外) 是可导的.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ ax+b, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 试求 a, b .

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 试说明 $f(x)$ 可导, 但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

例 6 设 $f'(x_0)$ 存在, 求下列各极限:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{1 - \cos h};$$

$$(4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a\Delta x) - f(x_0 + b\Delta x)}{\Delta x}$$

例 7 (2001-1) 设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 ()

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1-\cos h)$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h-\sin h)$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h)-f(h)]$ 存在.

例 8 (1996-3) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且

$$g(0)=1, g'(0)=-1.$$

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性.

例 9 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是 ()

(A) $f(x) = |x| \sin |x|.$

(B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}.$

(C) $f(x) = \cos |x|.$

(D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}.$

例 10 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 则下列命题错误的是 ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.
- (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.
- (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.
- (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

例 11 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ()

- (A) 在 $x=0$ 处左极限不存在. (B) 有跳跃间断点 $x=0$.
- (C) 在 $x=0$ 处右极限不存在. (D) 有可去间断点 $x=0$.

例 12 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$, 且有 $f'(0)=b$, 其中 a, b 为非零常数, 则 ()

- (A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导. (B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=a$.
- (C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=b$.

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=ab$.

例 13 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点.

第二节 导数的计算

1. 常用公式、定理

1. 导数的四则运算

【定理 2.4】设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导, 则 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, ($g(x) \neq 0$)

均可导, 并且有 $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$, $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

2. 复合函数求导法则

【定理 2.5】设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 如果 $g(x)$ 在 x 处可导, 且 $f(u)$ 在对应的 $u = g(x)$ 处

可导, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 x 处可导, 且有:

$$[f(g(x))]' = f'(u)g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

3. 反函数求导法则

【定理 2.6】设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某领域内连续，在点 x_0 处可导且 $f'(x) \neq 0$ ，并令其反函数为 $x = g(y)$ ，且 x_0 所对应的 y 的值为 y_0 ，则有：

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))} \text{ 或 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

为应用方便，反函数求导法则可简记为 $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ 。

4. 常见函数的导数

$$\begin{aligned} (x^a)' &= ax^{a-1}, (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\tan x)' &= \sec^2 x, (\cot x)' = -\csc^2 x, (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (e^x)' &= e^x, (\ln x)' = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

5. 参数方程求导

设函数 $y = f(x)$ 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 确定，则由复合函数求导及反函数求导法则可知：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

6. 高阶导数的莱布尼兹公式

设 $f(x), g(x)$ 均有 n 阶导数，则有：
$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(i)}(x)g^{(n-i)}(x)$$

常用的初等函数的 n 阶导数公式

$$(1) \quad y = e^x \quad y^{(n)} = e^x$$

$$(2) \quad y = a^x (a > 0, a \neq 1) \quad y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

$$(3) \quad y = \sin x \quad y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(4) \quad y = \cos x \quad y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(5) y = \ln x$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

$$(6) y = x^a$$

$$y^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}$$

例 1 计算下列函数的导数

$$(1) f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$(2) f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$(3) f(x) = \sec(x^2) \tan(\ln x)$$

$$(4) f(x) = x^x$$

例 2 已知 $(\sin x)' = \cos x$, $(\tan x)' = \sec^2 x$, 试用反函数求导法则计算 $(\arcsin x)'$ 与 $(\arctan x)'$.

例 3 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1, g'(1) = 2$ 则 $g(1)$ 等于_____.

例 4 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

例 5 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} =$ _____.

例 6 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}\bigg|_{x=0}$ 的值.

例 7 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ 所确定, 试计算 $\frac{dy}{dx}$.

例 8 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

例 9 计算下列函数的高阶导数.

(1) (2015-2) 函数 $f(x) = x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$ _____.

(2) $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

例 10 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$ ()

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.

(D) $(-1)^nn!$.

例 11 (2003-3) 设 $f(x) = \begin{cases} x^\lambda \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续, 则 λ 的取值范围是_____.

例 12 (2011-3) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

第三节 函数的微分

微分的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义 (点 x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 都在该邻域内), 如果函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微, 而 $A\Delta x$ 称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy , 即 $dy = A\Delta x$.

注: 一元函数可微与可导的关系如下

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处可微} \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处可导且 } dy|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.$$

若 $y = f(x)$, 则 $dy = f'(x)dx$. 导数 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 也称为微商, 就是微分之商的含义. 易知 $dx = \Delta x$.

微分的几何意义

如果说 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的纵坐标 $f(x_0)$ 的增量, 那么微分 $dy|_{x=x_0}$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处切线的纵坐标相应的增量.

一阶微分的形式不变性

若 $y = f(u)$, 则 $dy = f'(u)du$. 这里 u 不论是自变量还是中间变量微分形式都不变. 即函数的微分等于函数对变量求导乘以该变量的微分.

例 1 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 点处的微分 dy 是 ()

(A) 与 Δx 等价的无穷小.

(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

例 2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

第四节 导数的应用

导数应用之 曲线的切线和法线

切线方程 $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, 法线方程 $y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

例 1 (2001-2) 曲线 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为_____.

例 2 若 $f(x) = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) =$ _____.

例 3 (1998-3) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4. 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$,

则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线的斜率为 ()

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) 0. (C) -1. (D) -2.

例 4 (1991-4) 设曲线 $f(x) = x^3 + ax$ 与 $g(x) = bx^2 + c$ 都通过点 $(-1, 0)$ 且在点 $(-1, 0)$ 有公共切线, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

例 5 (2010-2) 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$ ()

- (A) $4e$. (B) $3e$. (C) $2e$. (D) e .

导数的应用之 中值定理基础

定理 1 (罗尔中值定理) 设 $f(x)$ 满足: (1) $f(x) \in C[a, b]$

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导

(3) $f(a) = f(b)$,

则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

定理 2 (拉格朗日中值定理) 设 $f(x)$ 满足: (1) $f(x) \in C[a, b]$

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 内可导

则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

【注】 (1) 拉格朗日中值定理又称为微分中值定理, 其等价形式有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a), \text{ 其中 } 0 < \theta < 1$$

(2) ξ 由 a, b 确定, 且微分中值定理的端点可以为变量

例 1 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = b, f(b) = a$. 证明: 存在一点

$\xi \in (a, b)$, 使得 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: 存在一点 $\xi \in (a, b)$,

使得 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(1) = \frac{1}{2}, f(2) = 2$. 证明: 存在一点

$\xi \in (1, 2)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}$.

例 5 设 $f(x) \in C[0, 3]$, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$

证明: 存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

例 6 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, $f(1) = 0$, 令 $H(x) = x^3 f(x)$,

证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $H'''(\xi) = 0$.

例 8 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $(0, 1)$ 二阶可导, 且 $f(1) = f(0) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$,

求证: (1) $\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $f(\eta) = \eta$.

(2) 对任意实数 λ , $\exists \xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

例 9 不用求出函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个实

根, $f''(x) = 0$ 有几个实根?

例 10 (08-2) 设 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

例 11 证明: $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

例 12 (92-3) 求证: 当 $x \geq 1$ 时, $\arctan x - \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

例 13 设 $f(x) = \arctan x \in C[0, a]$, $f(a) - f(0) = f'(\theta a)a$, 求 $\lim_{a \rightarrow 0} \theta^2$.

例 14 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) 1. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$.

例 15 (1996-2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

导数应用之 单调性、极值、凹凸性、拐点

1 单调性定理：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导.

(1) 如果在 (a, b) 上有 $f'(x) > 0$ ，那么函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增.

(2) 如果在 (a, b) 上有 $f'(x) < 0$ ，那么函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减.

2 函数极值点及其判定方法

1) . 极值点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对任意的 $x \in U(x_0)$ ，有 $f(x_0) < f(x)$ (或 $f(x_0) > f(x)$)，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）.

2) . 极值点的判别定理

a. (必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并在 x_0 处取得极值，那么 $f'(x_0) = 0$. (罗尔定理的推论)

b. (第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，并在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内可导.

i) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时， $f'(x) > 0$ ，而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时， $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

ii) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

iii) 若 $x \in U(x_0, \delta)$ 时， $f'(x)$ 符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值；

c. (第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数且 $f'(x_0) = 0$ ，那么

i) 若 $f''(x_0) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

ii) 若 $f''(x_0) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

3 函数的凹凸性

1) 凹函数与凸函数的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ，

则称 $f(x)$ 是 I 上的凹函数；如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ，

则称 $f(x)$ 是 I 上的凸函数.

2) 凹凸性与二阶导数的关系

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上具有一阶和二阶导数, 那么:

(1) 如果在 (a, b) 上有 $f''(x) > 0$, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数;

(2) 如果在 (a, b) 上有 $f''(x) < 0$, 那么函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸函数.

3) 函数的拐点: 函数凹凸性的分界点称之为拐点.

4) 拐点的判别:

拐点判别定理 I: 若在点 x_0 处 $f''(x_0) = 0$, 且在点 x_0 两侧函数二阶导数的符号不一样, 则点 x_0 为拐点.

拐点判别定理 II: 若在点 x_0 处 $f''(x_0) = 0$, 且有 $f'''(x_0) \neq 0$, 则点 x_0 为拐点.

例 1 求函数 $f(x) = x \cdot e^{-x}$ 的单调区间和极值.

例 2 (1996-2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判断它是否为极值点.

例 3 (2017-1, 2) 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

例 4 (94-3) 设 $y = f(x)$ 满足方程 $y'' + y' - e^{\sin x} = 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 ()

(A) x_0 某邻域内单调增加.

(B) x_0 某邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.

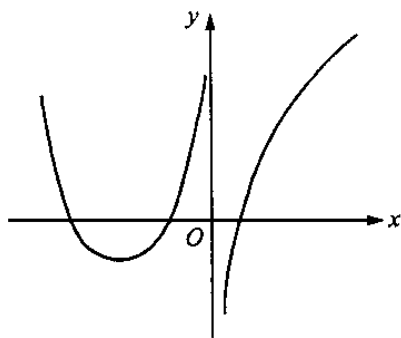
(D) x_0 处取得极大值.

例 5 (87-1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$, 则在 $x = a$ 处 ()

- (A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$. (B) $f(x)$ 取得极大值.
(C) $f(x)$ 取得极小值. (D) $f(x)$ 的导数不存在.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有 ()

- (A) 一个极小值点和两个极大值点
(B) 两个极小值点和一个极大值点
(C) 两个极小值点和两个极大值点
(D) 三个极小值点和一个极大值点



例 7 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$. 则当 $a < x < b$ 时有 ()

- A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$. B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$.
C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$. D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$.

例8试证: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

例 9 (12—1、2、3) 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1.$

例 10 设 $x \in (0,1)$, 证明:

(1) $(1+x) \ln^2(1+x) < x^2;$

(2) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$

例 11 (2008—2) 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为_____.

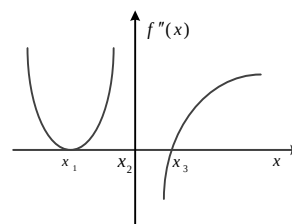
例 11. (2010—3) 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

例 13 已知函数 $f(x)$ 对一切 x 满足 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则 ()

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
- D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

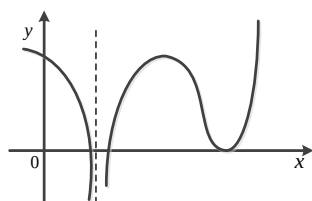
例 14. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为 ().

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3



例 15. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.
 (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.
 (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.
 (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.



导数应用之方程的根与函数零点问题

例 1 (2005-3) 当 a 取下列哪个值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰好有两个不同的零点 ()

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

例 2. 设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 求 k 的范围.

例 3. (1996-3) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ ()

- (A) 无实根. (B) 有且仅有一个实根.
(C) 有且仅有两个实根. (D) 有无穷多个实根.

例 4 (93-3) 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为 ()

- (A) 3. (B) 2.
(C) 1. (D) 0.

例 5 (89-3) 若 $3a^2 - 5b < 0$, 则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$ ()

- (A) 无实根. (B) 有唯一实根.
(C) 有三个不同实根. (D) 有五个不同实根.

第三章 一元函数积分学

【大纲要求】

1. 理解原函数的概念, 理解不定积分和定积分的概念(了解定积分的概念——数学三).
2. 掌握不定积分的基本公式, 掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理(了解定积分的基本性质, 了解定积分中值定理——数学三、数农), 掌握换元积分法与分部积分法.
3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分(数学一、二).
4. 理解积分上限的函数, 会求它的导数, 掌握牛顿—莱布尼茨公式.
5. 了解反常积分的概念, 会计算反常积分(数农只要求无穷区间上的反常积分).
6. (数学一、数学二)掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等)及函数的平均值.(会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积(数农)和函数的平均值, 会利用定积分求解简单的经济应用问题——数学三).

第一节 不定积分

1. 基本概念

【定义 3.1】 设函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在一个函数 $F(x)$, 使得对区间 I 上的每一点都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

【定义 3.2】 假设 $f(x)$ 在区间 I 上存在原函数, 那么它在该区间上的原函数全体, 称之为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记作 $\int f(x)dx$. 一般情况下, 区间 I 默认为函数 $f(x)$ 的自然定义域.

【定理 3.1】 原函数存在定理 连续函数一定有原函数.

注(1) 设 $f(x)$ 在 I 上存在第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 I 上不存在原函数.

注(2) 有第二类间断点的函数是可能存在原函数的.

例 不连续的函数也可能存在原函数, 比如:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 显然 } F'(x) = f(x).$$

注 函数的原函数与函数及函数的导数特征比较:

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
不一定为奇函数	偶函数	奇函数
偶函数	奇函数	偶函数
不一定为周期函数	周期函数	周期函数

注:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x), \int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x) + C$$

例 1. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$, 则 ()

(A) $f(x)$ 存在原函数.

(B) $g(x)$ 存在原函数.

(C) 令 $F(x) = \int_a^x g(t) dt$, 则 $F'(x) = g(x)$.

(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

例 2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ()

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

例 3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2x+1, & 0 \leq x < 2 \\ x^2+1, & x \geq 2 \end{cases}$, 试计算 $\int f(x) dx$

2. 基本性质

1. 不定积分的基本性质

设 $f(x), g(x)$ 均存在原函数, 则

$$1) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx, (k \in R, k \neq 0).$$

$$3) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ 或 } d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

$$4) \int F'(x) dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C.$$

注: 要注意第二个公式中的 $k \neq 0$, 因为当 $k=0$ 时, $\int kf(x) dx = \int 0 dx = C$, 而

$$k \int f(x) dx = 0(F(x) + C) = 0, \text{ 两边是不相等的.}$$

2. 基本积分公式

$$1) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, (a \neq -1)$$

$$2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$3) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C, \int e^x dx = e^x + C$$

$$4) \int \cos x dx = \sin x + C, \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5) \int \sec^2 x dx = \tan x + C, \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$6) \int \sec x dx = \ln|\tan x + \sec x| + C, \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$7) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C, \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$8) \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$9) \int \frac{1}{a^2 x^2 + b^2} dx = \frac{1}{ab} \arctan \frac{ax}{b} + C, \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$10) \int \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2 x^2}} dx = \frac{1}{a} \arcsin \frac{ax}{b} + C, \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$11) \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C,$$

$$12) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C,$$

例 1 计算下列不定积分

$$(1) \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx$$

$$(2) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$(3) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$(4) \int \tan^2 x dx$$

$$(5) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$(6) \int \frac{1 + x^2 + x}{x(1 + x^2)} dx$$

第一类换元法（凑微分）

【定理 3.2】设 $f(u)$ 有原函数， $u = \varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}$$

1. 第一类换元法

$$\int f(ax^n + b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na} \int f(ax^n + b)d(ax^n + b)$$

$$\int f(e^x)e^xdx = \int f(e^x)d(e^x)$$

$$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)d(\ln x)$$

$$\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 \int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$$

$$\int f(\sin x)\cos xdx = \int f(\sin x)d(\sin x)$$

$$\int f(\tan x)\sec^2 xdx = \int f(\tan x)d(\tan x)$$

$$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d(\arctan x)$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$$

例 2 计算下列不定积分

$$(1) \int \frac{1}{1+2x^2}dx$$

$$(2) \int \cos \frac{x}{a}dx$$

$$(3) \int 2x \sin x^2 dx$$

$$(4) \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$(5) \int x(1+x^2)^{50} dx$$

$$(6) \int \frac{\cos 2x}{2 + \sin x \cos x} dx$$

$$(7) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{1+\cos x} dx$$

$$(9) \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$$

$$(10) \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$(11) \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$(12) \int \cos^4 x dx$$

第二类换元法

【定理 3.3】 设 $x = \psi(t)$ 是单调, 可导的函数, 并且 $\psi'(t) \neq 0$. 又设 $f(\psi(t))\psi'(t)$ 具有原函数 $G(t)$, 则有换元公式 $\int f(x)dx = \left[\int f(\psi(t))\psi'(t)dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)} = G(\psi^{-1}(x)) + C$.

常用的换元方法如下:

1) 处理根式的五种方法

$$\sqrt{a^2 - x^2} : x = a \sin t; \quad \sqrt{a^2 + x^2} : x = a \tan t; \quad \sqrt{x^2 - a^2} : x = a \sec t;$$

被积函数形如 $f\left(\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, 可令 $\frac{ax+b}{cx+d} = t^2$; 被积函数形如

$f(\sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \dots, \sqrt[k_n]{ax+b})$, 可令 $ax+b = t^N$, $N = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ (也即 $k_1, k_2, \dots, k_n$

的最小公倍数)。

2) 当被积函数是指数函数的代数式时 (也即形如 $f(a^x)$ 时), 可以采用指数代换

$$a^x = t, x = \frac{1}{\ln a} \ln t.$$

3) 如果被积函数为幂函数的分式, 当分母的次数相对于分子较高时, 可以考虑用倒代换

$$x = \frac{1}{t}.$$

例 3 计算下列不定积分

$$(1) (1997-2) \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

$$(2) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx.$$

$$(4) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx.$$

$$(5) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$$(6) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx.$$

(7) (1992-2) 求 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

(8) (2001-2) 求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$.

三. 分部积分法

1) 当被积函数形如 $P_n(x)e^{kx}, P_n(x)\sin ax, P_n(x)\cos ax$ 时 (其中 $P_n(x)$ 表示 n 次多项式),

一般选取 $u(x) = P_n(x)$, $v'(x) = e^{kx}$ (或 $\sin ax, \cos ax$).

2) 当被积函数形如 $e^{kx}\sin ax, e^{kx}\cos ax$ 时, $u(x)$ 和 $v'(x)$ 可以随意选取, 一般通过两次分部积分再解方程.

3) 当被积函数形如 $P_n(x)\arctan x, P_n(x)\arcsin x, P_n(x)\arccos x, P_n(x)\ln x$ 时, 选取

$v'(x) = P_n(x)$, $u(x) = \arctan x$ (或 $\arcsin x, \arccos x, \ln x$).

例 4 计算下列不定积分

(1) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$

(2) $\int x^2 \sin^2 x dx$

(3) $\int \sin(\ln x) dx$

(4) $\int x \arctan x dx$

$$(5) \int (\arcsin x)^2 dx$$

$$(6) \int x(\ln x)^2 dx$$

例 5 不定积分综合题

$$(1) (1993-1) \text{ 求 } \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx.$$

$$(2) (2001-1) \text{ 求 } \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx.$$

$$(3) \text{ 计算不定积分 } \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$(4) (2006-2) \text{ 求 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

(5) (2009-23) 计算不定积分 $\int \ln(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}) dx \quad (x > 0)$

(6) $\int e^{ax} \sin bxdx (a \neq 0, b \neq 0)$

(7) $\int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})} dx.$

四. 有理函数积分法

例 6 计算下列不定积分

(1) $\int \frac{x+1}{x^2-x-6} dx$

(2) $\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$

(3) $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$

(4) $\int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx$

例 7 设 $\int xf(x)dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)}dx =$ _____.

例 8 计算下列不定积分

(1) $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$

(2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$

(3) $\int \frac{1}{1 + 2 \tan x} dx$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \arctan x dx$

(5) $\int \frac{(1+x^2) \arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$

$$(6) \int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$$

$$(7) \int \sec^3 x dx$$

$$(8) \int e^{2x} (\tan x + 1)^2 dx$$

$$(9) \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$$

$$(10) \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

例 9 计算 $\int \arcsin x \arccos x dx$

第二节 定积分

一. 基本知识点

1. 定积分的定义

1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 在 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

这样 $[a, b]$ 就被分为了 n 个子区间 $[x_{i-1}, x_i], (i=1, 2, \dots, n)$

用 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 表示各区间的长度, 再在每个区间上取一点 $\xi_i, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, 作如下和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$

令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i)$, 如果有极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在且与 $[a, b]$ 的划分及 ξ_i 的选取无关,

则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 改极限称之为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积式, x 称为积分变量, $[a, b]$ 称为积分区间, a, b 分别称为积分上下限.

注 定积分的定义 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{i}{n}(b-a)) \frac{b-a}{n}$

例 1. 求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} (x \neq 0)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) (12—2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) (02—2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) (04—2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 ()

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$ (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$ (C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$ (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$

(6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n + \frac{1}{n}}.$

(7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\cos \frac{i}{n} \pi + 1}$

(8) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$

2. 基本性质

可积性定理

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

定理 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限多个间断点, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

定理 3 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

定积分的性质

$$1. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

注: $\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b f(x)du$

$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b \alpha f(x) \pm \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$4. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(u)du + \int_c^b f(t)dt$$

$$5. \int_a^b 1dx = b - a$$

$$6. \text{ 如果在区间 } [a, b] \text{ 上恒有 } f(x) \geq 0, \text{ 则有 } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

推论: i 如果在区间 $[a, b]$ 上恒有 $f(x) \geq g(x)$, 则有 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$;

ii 设 M 和 m 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 则有:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

iii (积分中值定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则在积分区间 $[a, b]$ 上至少存

在一点 ξ 使得下式成立: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

例 2. 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的取值范围

$$A \quad (0, 1). \quad B \quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right). \quad C \quad \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \quad D \quad (\pi, +\infty).$$

例 3 比较下列积分的大小 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$.

例 4 (1994-1, 2) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$,

$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则有 ()

(A) $N < P < M$. (B) $M < P < N$. (C) $N < M < P$. (D) $P < M < N$.

例 5 (97—12) $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ ()

(A) 为正常数. (B) 为负常数. (C) 恒为零. (D) 不为常数.

例 6 (12—1、2、3) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k=1, 2, 3)$, 则有 ()

(A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$ (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则积分上限的函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 并且它的导数是

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), a \leq x \leq b$$

进一步可得, 变下限积分的导数 $\frac{d}{dx} \int_x^b f(t)dt = -\frac{d}{dx} \int_b^x f(t)dt = -f(x)$

另有 $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t)dt = \frac{d}{du} \int_a^{u(x)} f(t)dt \frac{du}{dx} = f(u(x))u'(x)$ ($u(x)$ 可导).

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ 是在 $f(x)$ $[a, b]$ 上的一个原函数.

例 7 (1998-1) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt = (\quad)$

(A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$. (C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$

例 8 (1999-1) $\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 9 (1999-3) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2} \arctan x^2$. 已知 $f(1) = 1$, 求

$\int_1^2 f(x)dx$ 的值.

3. 定积分的计算

1) 牛顿-莱布尼兹公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2) 换元法

定理: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

i $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

ii $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数, 其值域 $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$

则有
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

注: 该定理可以有正反两个方面的应用, 分别对应不定积分的两种换元法. 而且, 定积分中换元法应用时计算到最后无需代回, 比不定积分更简单.

3) 分部积分法

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

4) 利用奇偶性

设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上可积

如果 $f(x)$ 是偶函数, 则有 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

如果 $f(x)$ 是奇函数, 则有 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

例 10 计算下列积分

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$ (2) $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(3) $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}dx$ (4) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

(5) $\int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x}-1}dx$ (6) $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx$

(7) (12—1) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(8) (01—2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(9) (92—2) 求 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$

(10) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, 则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-x}} dx$

(12) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$

$$(13) \int_{-2}^2 (x+1)\sqrt{4|x|-x^2} dx$$

$$(14) (10-1) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(15) (1999-3) \text{ 设 } f(x) \text{ 有一个原函数 } \frac{\sin x}{x}, \text{ 则 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(16) \int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x} dx$$

$$(17) \int_0^2 x^2 \sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(18) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$$

第三节 反常积分

一. 基本概念

1. 无穷限反常积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 取 $t > a$, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ 存在, 则称此极限值为

函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. 也就是说

$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$. 此时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 否则称反常积分

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

同样, 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上连续, 且极限 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$ 存在时, 称此极限为函数 $f(x)$ 在

$(-\infty, a]$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$. 即 $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$. 此时也称反常积

分 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 收敛, 否则称反常积分 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 发散.

最后, 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且极限 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$ 和 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ 都存在时, 则

称这两个极限值之和为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \left(\int_{-\infty}^a f(x) dx \right) + \left(\int_a^{+\infty} f(x) dx \right).$$

也就是说当反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 都收敛时 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 当 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

和 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 有一个发散时, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

2. 无界函数反常积分

瑕点: 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的任一邻域内都无界, 则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点.

反常积分: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, b 为 $f(x)$ 的瑕点, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ 存在,

则称该极限为函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$. 也就是说

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$. 此时也称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 否则称反常积分

$\int_a^b f(x) dx$ 发散.

同样, 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, a 为 $f(x)$ 的瑕点, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$ 存在, 则

称该极限为函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$. 也就是说

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$. 此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 否则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

最后设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上除了点 c ($a < c < b$) 处处连续, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx$ 与极限 $\lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx$ 都存在, 则称这两个极限值之和为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ 即}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c^+} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^-} \int_t^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

也就是说当反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛时 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛; 当 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 有一个发散时, $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

例 1 计算下列反常

$$(1) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}}$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

$$(4) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$$

$$(5) \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(6) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} dx$$

$$(7) \int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx.$$

(9) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

例 2 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1, (k < 0)$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

例 3 (1995-3) 下列广义积分发散的是 ()

(A) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx.$ (B) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ (C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$ (D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

例 4 $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \int_1^{+\infty} f(x) dx$, 求 $f(x).$

第四节 一元函数积分学的应用

一. 定积分的几何应用

1. 平面图形面积的计算

2. 微元法简介

1). 微元法是用积分计算连续变化的量的一种重要思想方法, 它适用于满足可加性的实际量, 如面积、体积、质量、作用力等. 前面平面图形面积的计算公式都可以用微元法进行推导.

2). 微元法使用步骤

i). 根据问题的具体情况选取一个变量如 x 为积分变量, 并确定它的变化区间.

ii). 将区间 $[a, b]$ 分为许多小区间, 取其中一个小区间 $[x, x + dx]$, 根据实际问题

求出在这一小区间上求出 U 所对应的分量 ΔU , ΔU 可以表示为形式 $f(x)dx$.

iii). 计算积分 $\int_a^b f(x)dx$

3). 微元法的应用

(1). 极坐标下图形面积的计算

如图, 设曲线方程为 $r = \rho(\theta)$, 取 θ 为积分变量, 设其上下限为 α, β . 在图中取面积元 (阴影部分), 设其角度为 $d\theta$, 当 $d\theta$ 取得比较小时, r 在这个范围内可以看作是不变的, 设为

$\rho(\theta)$. 于是, 该面积元的可以近似看做一个扇形, 其面积为 $dS = \frac{1}{2}(\rho(\theta))^2 d\theta$.

由此可以得到面积计算公式 $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(\theta))^2 d\theta$.

(2). 旋转体体积计算

函数 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, 将它的图像绕 x 轴旋转一周得到一个旋转体, 求该旋转体的体积.

取 θ 为积分变量, 其上下限为 a, b . 取 $[a, b]$ 上的一个小区间 $[x, x + dx]$, 当 dx 取得足够小时, 函数 $f(x)$ 在该区间上的函数值可以看做不变的. 则该区间的函数图像旋转之后得到的体积元可以近似地看做一个圆柱, 其底面半径为 $f(x)$, 高为 dx , 因此体积可以表达为

$dV = \pi (f(x))^2 dx$. 由可以得到体积计算公式 $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$.

(3). 平行截面面积已知立体图形的体积

同上, 可得面积计算公式为 $V = \int_a^b S(x)dx$.

3. 曲线弧长的计算

空间曲线 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), a \leq t \leq b \\ z = z(t) \end{cases}$ 的弧长的计算公式为

$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$, 其中 $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$ 称之为弧长微分.

如果曲线在平面内, 其参数方程为 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), a \leq t \leq b \end{cases}$, 则相应的计算公式改为

$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$; 如果曲线 L 由函数 $y = f(x), a \leq x \leq b$, 则公式变为

$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$; 如果曲线 L 的方程是极坐标形式 $r = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则相应的计算公式为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta$.

4. 旋转曲面侧面积的计算

设在 x 上方有一条平面曲线, $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), a \leq t \leq b \end{cases}$, 其中 $x(t)$ 满足 $x'(t) \neq 0$.

则由微元法可知, 该曲线绕 x 轴旋转所得的旋转曲面的面积

$$S = \int dS = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

如果该曲线由函数 $y = f(x), a \leq x \leq b$ 给出, 则相应的计算公式为

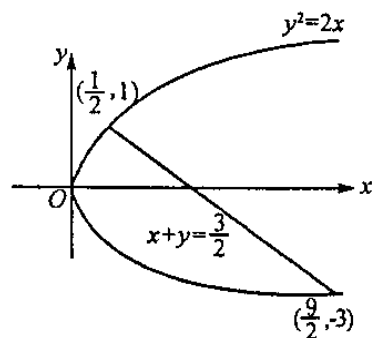
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

如果该曲线由极坐标方程 $r = \rho(\theta), a \leq \theta \leq b$ 给出, 则相应的计算公式为

$$S = 2\pi \int_a^b \rho(\theta) \sin \theta \sqrt{\rho^2(\theta) + [\rho'(\theta)]^2} d\theta.$$

例 1 (1996-2) 由曲线 $y = x + \frac{1}{x}, x = 2$ 及 $y = 2$ 所围图形的面积 $S =$ _____.

例 2 求曲线 $y^2 = 2x$ 在点 $(\frac{1}{2}, 1)$ 处法线与曲线所围成图形的面积



例 3 计算由下列曲线围成的平面图形的面积

(1) $r = a(1 + \cos \theta)$

(2) $\rho = \sqrt{2} \sin \theta$;

例 4 计算下列几何体的体积

1) $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体体积.

2) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ 与 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

例 5 (1987-2) 设 D 是由曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 围成的曲边梯形,

求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

例 6 (1989-2) 曲线 $y = \cos x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 与 x 轴所围成的图形, 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

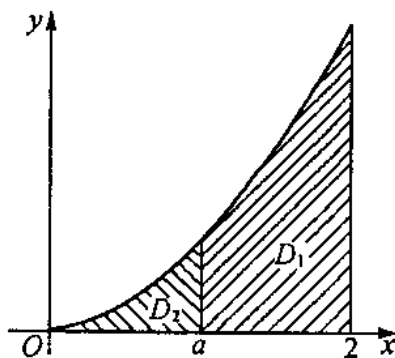
- (A) $\frac{\pi}{2}$. (B) π . (C) $\frac{\pi^2}{2}$. (D) π^2 .

例 7 计算由下列曲线围成的平面图形的面积

- 1) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$
 2) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴

例 8 设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域; D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, y = 0$ 所围成的平面区域, 其中 $0 < a < 2$. (自己阅读)

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 ; D_2 绕 y 轴而成的旋转体体积 V_2 (如图)



(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值

例 9 设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x} a^{\frac{x}{2a}}$ ($a > 1, 0 \leq x < +\infty$) 下方、 x 轴上方的无界区域

(1) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(2) 求 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

例 10 (2003-1) 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

例 11. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为 ()

(A) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$ (B) $4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta$ (C) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta$ (D) $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2 d\theta$

例 12. 设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [0, 1]$. 定义函数列:

$$f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \dots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$$

记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围平面图形的面积, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$.

第四章 微分方程

【大纲要求】

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法, 会解齐次微分方程.

3. 理解（了解——数学三）线性微分方程解的性质及解的结构.
4. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程（数学一、二）.
5. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
6. 会用降阶法解下列形式的微分方程： $y^{(n)} = f(x)$, $y'' = f(x, y')$ 和 $y'' = f(y, y')$ （数学一、二）.
7. 会解欧拉方程（数学一）.
8. 会解伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程（数学一）.
9. 了解差分与差分方程及其通解与特解等概念. 了解一阶常系数线性差分方程的求解方法（数学三）.
10. 会用微分方程解决一些简单的应用问题（经济应用问题——数学三）.

第一节 一阶微分方程

一. 基本概念

1. 微分方程

含有未知函数导数的方程称之为微分方程. 其中，如果未知函数为一元函数，则称该方程为常微分方程；如果未知函数为多元函数，则称该方程为偏微分方程. 我们主要讨论常微分方程.

常微分方程的一般形式为 $F(x, f, f', f'', \dots, f^{(n)}) = 0$. 其中未知函数的最高阶导数的阶称之为微分方程的阶. 我们的目的是要找出这样的函数 $y = \varphi(x)$ ，把它代入微分方程后方程

$F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$ 成为恒等式.

如果微分方程的解中含有任意常数，并且任意常数的个数等于微分方程的阶数，这样的解称为微分方程的**通解**. 如果微分方程是一阶的，则确定通解中任意常数的条件一般是 $y(x_0) = y_0$ ；如果微分方程是二阶的，则确定通解中任意常数的条件一般是

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$. 确定了通解中的任意常数之后，就得到微分方程的**特解**. 易知微分方程的解是一条曲线，称之为微分方程的积分曲线.

2. 常见的一阶微分方程

a. 可分离变量微分方程

如果一个一阶微分方程可以写成 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式，我们就称该微分方程为可分离

变量的微分方程. 对该方程的两端求不定积分 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 就得到微分方程的通解.

例 1 解微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$

例 2 解微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$

例 3 解微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解

例 4 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y}{1+x^2} \Delta x + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx

的高阶无穷小量, $y(0) = \pi$, 则 $y(1) =$ _____

b. 齐次方程

如果一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 中的函数 $f(x, y)$ 可以写成 $\varphi(\frac{y}{x})$ 的形式, 则称该方程为齐次方程.

例 5 解微分方程 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$

例 6 求初值问题 $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ 的解

例 7 求解下列微分方程

$$x^2 y dx + (x^3 + y^3) dy = 0$$

c. 一阶线性微分方程

标准的方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

称为一阶线性微分方程. 标准是指 $\frac{dy}{dx}$ 的系数为 1, 线性指函数 y 及其导数的次数均为 1, 且

函数中不含有 y 及其导数 $\frac{dy}{dx}$ 的乘积项.

例 8 求微分方程 $(y - x^3) dx - 2x dy = 0$ 的通解

例 9 求微分方程 $(x^2 - 1) dy + (2xy - \cos x) dx = 0$ 满足 $y(0) = 1$ 的解.

例 10 求微分方程 $(y + x^3) dx - 2x dy = 0$ 满足 $y(1) = \frac{6}{5}$ 的解

d. 伯努利方程

一阶微分方程 $y' + p(x)y = q(x)y^a$ 称为伯努利方程. 这种方程可以通过变量代换化为一阶线性微分方程.

例 11 求微分方程 $xy' + y = x^3 y^6$ 的通解

第二节 二阶微分方程

基本概念

1. 高阶微分方程:

二阶及二阶以上的微分方程称之为高阶微分方程. 对于某些高阶微分方程, 我们可以通过代换将它化成较低阶的方程来求解.

2. 二阶常系数线性微分方程

形如微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 形式的方程, 我们称之为二阶线性微分方程, 若 $f(x) \equiv 0$ 时, 方程叫做二阶齐次微分方程; 若 $f(x) \neq 0$, 方程称之为二阶非齐次微分方程.

我们主要讨论 $P(x), Q(x)$ 恒为常数的情形, 这种情况下, 该方程称为二阶常系数线性微分方程, 相应的齐次方程称为二阶常系数齐次线性微分方程. 二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为 $y'' + py' + qy = 0$.

4. 欧拉方程

形如 $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$ 称为欧拉方程.

2. 基本公式与定理

二阶线性微分方程解的结构定理:

方程的一般形式为 $y'' + py' + qy = f(x)$.

定理 1: 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个解, 且 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}$ (又称 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关), 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是该方程的通解, 其中 C_1, C_2 为两个相互独立的常数.

定理 2: 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解, 则 $y = y_1(x) - y_2(x)$ 是相应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解.

定理 3: 设 $y_1(x)$ 是齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的解, $y_2(x)$ 是非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的解, 则 $y = y_1(x) + y_2(x)$ 是非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的解.

定理 4 (叠加原理): 设 $y_1(x)$ 是非齐次方程 $y'' + py' + qy = f_1(x)$ 的特解, $y_2(x)$ 是非齐次方程 $y'' + py' + qy = f_2(x)$ 的特解, 则 $y = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$ 是非齐次方程 $y'' + py' + qy = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$ 的解.

定理 5: 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的两个线性无关的解, $y^*(x)$ 是非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$ 是非齐次方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ 的通解, 其中 C_1, C_2 为两个相互独立的常数.

注: 从历年考研的真题来看, 以考察后面两种微分方程为主.

2. 求解二阶常系数齐次线性微分方程的一般步骤 (二阶以上类似):

写出 $y'' + py' + qy = 0$ 对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

41. 求出特征方程的两个根 r_1, r_2 .

42. 根据 r_1, r_2 的不同形式, 我们有如下的公式:

$r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
r_1, r_2 为两个不同实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
r_1, r_2 为两个相同实根	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
r_1, r_2 为一对共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$y = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$

3. 求解二阶常系数非齐次线性微分方程的一般步骤 (二阶以上类似):

先求出相应齐次方程的通解 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, 再求出非齐次线性方程的一个特解 $y^*(x)$,

则非齐次线性方程的通解可表示为 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$.

求非齐次线性方程特解方法主要用到如下的**待定系数法**:

根据 $f(x)$ 的不同形式, 我们可以分别设方程的特解为如下形式, 再代回原方程, 得到所设特解中各项系数的值.

$f(x)$ 形式	条件	所设特解形式
$f(x) = p_n(x)$ 为 n 次多项式	0 不是特征根	$y^* = R_n(x)$ ($y^* = R_n(x)$ 为 n 次多项式)
	0 是单特征根	$y^* = x R_n(x)$
	0 是复特征根	$y^* = x^2 R_n(x)$
$f(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$ 为 n 次多项式	α 不是特征根	$y^* = e^{\alpha x} R_n(x)$
	α 是单特征根	$y^* = x e^{\alpha x} R_n(x)$
	α 是复特征根	$y^* = x^2 e^{\alpha x} R_n(x)$

$f(x)$ $= e^{\alpha x} [p_n(x) \cos \beta x$ $+ p_m(x) \sin \beta x]$	$\alpha \pm i\beta$ 不是特征根	$y^* = e^{\alpha x} (R_k(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$ $(k = \max \{m, n\}, S_k(x) \text{ 为 } k \text{ 次多项式})$
	$\alpha \pm i\beta$ 是特征根	$y^* = x e^{\alpha x} (R_k(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$

如果 $f(x)$ 是上述多种情况之和, 则可以运用叠加原理, 将特解也写成相应多个特解之和.

例 1 求下列微分方程的通解

1) $y'' - 2y' + y = 0$

2) $y'' + y' - 2y = 0$

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$

例 2 求下列微分方程的通解

1) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x$

2) $y'' + y' - 2y = 2 \cos 2x$

3) $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$

4) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

例 3 (2004-2) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$

例 4. 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$

(A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$. (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$.

(C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$. (D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

例 5. 求具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程.

例 6. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

第三节 微分方程的应用

例 1 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$;

例 2 在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y) (x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(1) 求 L 的方程;

(2) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

例 3 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

例 4. 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(x-t)dt = ax^2$.

(I) 求 $f(x)$;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 1. 求 a 的值.

例 5. 设曲线 $y = f(x)$, 其中 $y = f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$. 已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 及 $x = t (t > 1)$ 所围成的曲边梯形, 绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线方程.

例 6. 用变量代换 $x = \cos t (0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足

$y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

例 7. 设函数 $y = y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = -4 \end{cases}$, 求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$

第五章 多元函数微分学

【大纲要求】

1. 理解多元函数的概念, 理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念, 会求全微分, 了解全微分存在的必要条件和充分条件, 了解全微分形式的不变性.
4. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
5. 了解隐函数存在定理(数学一、二), 会求多元隐函数的偏导数.
6. 理解方向导数与梯度的概念, 并掌握其计算方法. 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念, 会求它们的方程. 了解二元函数的二阶泰勒公式(数学一).
7. 理解多元函数极值和条件极值的概念, 掌握多元函数极值存在的必要条件, 了解二元函数极值存在的充分条件, 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值, 会求简单多元函数的最大值和最小值, 并会解决一些简单的应用问题.

第一节 多元函数微分

一、基本知识点

1. 基本概念

n 维空间

n 元有序实数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 全体所构成的几何成为 n 维空间, 记作 R^n .

邻域: 以点 P_0 为圆心的一个圆称之为 P_0 的邻域, 记作 $U(P_0, \sigma)$, 其中 σ 为圆的半径. P_0 的

去心邻域记作 $\overset{\circ}{U}(P_0, \sigma)$.

连通集: 如果集合 D 中任意两点都可以用折线链接起来, 则称集合 D 为连通集.

n 元函数

定义: 设 D 是 R^2 的一个非空子集, 则称映射 $D \rightarrow R$ 为定义在 D 上的二元函数, 记作

$z = f(x, y)$ 或 $z = f(P), P(x, y) \in D$. 其中, D 称为函数的定义域,

$f(D) = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为函数的值域.

例 1 求函数 $z = \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{xy}$ 的定义.

例 2 求函数 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(y^2 - 2x + 1)$ 的定义域.

例 3 设 $f(x + y, x - y) = x^2 y + y^2$, 求 $f(x, y)$.

例 4 设 $f(x + y, xy) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$, 求 $f(x, y)$.

2. 重极限与累次极限

定义: 设二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , 如果点 P_0 是 D 的聚点. 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$,

总存在正数 $\delta > 0$ 使得当 $P \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ 时有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称 $z = f(x, y)$ 在 P_0 点的极限为 A , 记作 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 或

$$f(x, y) \rightarrow A \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

例 5 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} \quad (a \neq 0 \text{ 常数})$

例 6 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$

例 7 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 |y|^{\frac{3}{2}}}{x^4 + y^2}.$

例 8 讨论 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

3. 二元函数的连续性及其性质

定义：如果 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的定义域 D 的聚点，且有 $P_0(x_0, y_0) \in D$ 及

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 成立，则称函数 $z = f(x, y)$ 在 P_0 点连续.

偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0) \in D$ 的某一邻域内有定义，把 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx ，相应的函数有增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

而如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点

$P_0(x_0, y_0)$ 处对变量 x 的偏导数，记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_x(x_0, y_0).$$

类似地，可以定义函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对变量 y 的偏导数

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \text{ 记作 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_y(x_0, y_0).$$

例 9 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ，在点 $(0, 0)$ 处 ()

- (A) 连续，偏导数存在 (B) 连续，偏导数不存在
(C) 不连续，偏导数存在 (D) 不连续，偏导数不存在

例 10 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^4}}$ ，则

- (A) $f'_x(0, 0)$ ， $f'_y(0, 0)$ 都存在 (B) $f'_x(0, 0)$ 不存在， $f'_y(0, 0)$ 存在
(C) $f'_x(0, 0)$ 不存在， $f'_y(0, 0)$ 不存在 (D) $f'_x(0, 0)$ ， $f'_y(0, 0)$ 都不存在

例 11 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点连续的 ()

- (A) 充分条件而非必要条件 (B) 必要条件而非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

4. 全微分

定义: 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \text{ 其中 } A, B \text{ 仅依赖于 } (x, y) \text{ 而与 } \Delta x, \Delta y \text{ 无关,}$$

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记作 dz . 即 $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

例 12 讨论下列函数在 $(0, 0)$ 点的连续性, 可导性, 与可微性.

$$(1) \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(\frac{1}{x^2 + y^2}), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(2) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(3) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

例 13. 连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 14. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点 ()

(A) 不连续 (B) 连续但不可导 (C) 可导但不可微 (D) 可微

例 15. 函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是 ()

(A) 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微

(B) 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微

(C) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在

(D) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

例 16. 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 则 $\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 依次是 ()

(A) $\frac{1}{2}, 0$. (B) $0, \frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}, 0$ (D) $0, -\frac{1}{2}$.

例 17. 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1 + y)e^y dy$,

$f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) =$ _____.

5. 高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$, 则这两个偏导数

也是区域 D 上的函数, 如果这两个函数的偏导数也存在, 则称它们是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数. 按照不同的求导顺序可以得到如下四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

同样可得三阶、四阶... 偏导数.

6. 重要公式与定理

1). 连续性定理: 一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

2). 有界闭区域上连续函数的性质:

1) 有界性 有界闭区域上的连续函数在其定义域内有界

2) 最值定理 有界闭区域上的连续函数在其定义域内能够取到最大值与最小值.

3) 介值定理 有界闭区域上的连续函数能够取到其最大值和最小值之间的一切值.

注: 有界闭区域相当于一元函数中的闭区间, 所以其性质也和闭区间上的连续函数类似.

3). 可微、偏导数存在、连续、偏导数连续的关系

定理: 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 则函数在该点连续且两个偏导数均存在, 并

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

注: 在一元函数中, 可微与可导是等价的, 且可导必连续. 在二元函数中, 可导 (偏导数存在) 不一定连续, 也不一定可微. 但由上述定理可知: 可微一定连续, 可导. 关于可导与可微的关系, 我们还有如下定理:

定理: 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x, y) 点连续, 则函数在该点可微.

4). 高阶混合偏导数与求导次序无关: 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续, 则在该区域内这两个二阶混合偏导数相等.

5). 偏导数的性质

i) 偏导数的四则运算

偏导数的四则运算有与一元函数类似的性质

设 $f(x, y)$, $g(x, y)$ 的偏导数均存在, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x}(af(x, y) + bg(x, y)) = a \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y)g(x, y)] = g(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right] = \frac{g(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - f(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}}{g^2(x, y)}, g(x, y) \neq 0$$

ii) 复合函数求导法则

根据复合函数中间变量的不同形式我们有如下求导公式:

$$\text{如果 } z = f(u, v) = f(\varphi(t), \psi(t)), \text{ 则 } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt};$$

$$\text{如果 } z = f(u, v) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{如果 } z = f(u, v) = f(\varphi(x, y), \psi(y)), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dy}$$

iii) 隐函数存在定理

定理一: 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 附近具有连续偏导数, 且有 $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 附近能唯一确定一个函数 $z = f(x, y)$, 满足

$$z_0 = f(x_0, y_0) \text{ 及 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

定理二: 设函数 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 附近具有连续偏导数, 且有

$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) \neq 0$. 同时, 由偏数组成的雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ 在点 } (x_0, y_0, u_0, v_0) \text{ 处不为零. 则方程组 } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \text{ 在点 } (x_0, y_0, u_0, v_0) \text{ 附近能唯一确定一个函数 } u = u(x, y), v = v(x, y).$$

(x_0, y_0, u_0, v_0) 附近能唯一确定两个函数 $\begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases}$, 满足 $\begin{cases} u_0 = f(x_0, y_0) \\ v_0 = g(x_0, y_0) \end{cases}$, 且 u, v 关

于 x, y 的偏导数可按照与一元函数类似的方法来求得 (等式两边同时求导, 再解方程)。

例 18 设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

例 19 设 f, g 为连续可微函数, $u = f(x, xy), v = g(x + xy)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

例 20 设 $z = f(e^x \sin y, x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

例 21 设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$,

$$g(x, y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right], \text{ 求 } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

例 22 设 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

例 23 设 $z = z(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 若有 $z(x, 2x) = x$, $z'_1(x, 2x) = x^2$,

求 $z''_{11}(x, 2x)$.

例 24 (2016-2, 3) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则

(A) $f'_x - f'_y = 0$. (B) $f'_x + f'_y = 0$. (C) $f'_x - f'_y = f$. (D) $f'_x + f'_y = f$.

例 25 (2005-3) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$, 则 $\left. dz \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 26 (2000-1) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

例 27 (2006-1, 2) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

例 28 (2010-2) 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式

$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下化简

为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

例 29 (2013-3) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z + y)^x = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 30 (2016-1) 设函数 $f = f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\left. dz \right|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 31 (1995-1) 设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

例 32 设 $y = y(x)$, $z = z(x)$, 由 $\begin{cases} x + y + z + z^2 = 0 \\ x + y^2 + z + z^3 = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

例 33 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - xy = 2$ 和

$e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 所确定, 求 $\frac{du}{dx}$.

例 34 设 $u = f(x, y, z, t)$ 关于各变量均有连续的偏导数, 其中由方程组 $\begin{cases} y^2 + yz - zt^2 = 0 \\ te^z + z \sin t = 0 \end{cases}$ 确

定 z, t 为 y 的函数, 试计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

例 35. 已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值,

$$z = f(x + y, f(x, y)). \text{ 求 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, 1)}.$$

例 36. 设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}.$$

若 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

例 37 设有三元方程 $xy - z \ln y + e^{xy} = 1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0, 1, 1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程

- 1) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$
- 2) 可以确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z), z = z(x, y)$
- 3) 可以确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z), z = z(x, y)$
- 4) 可以确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z), x = x(z, y)$

第二节 多元函数微分学的应用

一、基本知识点

1. 多元函数极值的定义及其判定方法

1) 多元函数极值的定义

设点 P_0 是函数 $z = f(x, y)$ 的定义域 D 的内点, 若存在 P_0 的邻域 $U(P_0)$, 使得对任意异于

P_0 的点 $P \in U(P_0)$ 都有 $f(P) < f(P_0)$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 P_0 有极大值, 点 P_0 称为

函数 $z = f(x, y)$ 的极大指点. 类似地, 可以定义极小值与极小值点. 极大值与极小值统称为

极值, 极大指点与极小值点统称为极值点.

注: 同一元函数中的情形一样, 函数极值的定义本身对函数的连续性和可导性没有什么要求, 也就是说函数在极值点处可以是可导的.

2) 多元函数极值的判定

a. 必要条件: 设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点具有偏导数, 且在该点有极值, 则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0.$$

注: 满足 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为驻点, 由上述定理可知, 存在偏导

数的极值点必为驻点. 但由于函数的极值点不一定存在偏导数, 因此极值点不一定是驻点; 反过来, 驻点也不一定是极值点.

我们处理的大多数函数都是存在偏导数的, 该定理的意义是把极值点缩小到了驻点与不可导点的范围内.

b. 充分条件: 设函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点的某邻域内具有连续的一阶及二阶偏导数,

又设 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$. 令

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C \quad (\text{回忆定理 } f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0))$$

a) 若 $AC - B^2 > 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点具有极值. 当 $A > 0$ 时取得极小值; 当 $A < 0$ 时取得极大值.

b) 若 $AC - B^2 < 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点没有极值.

c) 若 $AC - B^2 = 0$, 则函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可能有极值, 也可能没有极值.

例 1 (2012-2) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意的 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$,

则使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是 ()

- (A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.
(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

例 2 (2017-2) 设 $f(x, y)$ 具有一阶偏导数, 且对任意的 (x, y) , 都有

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0, \text{ 则}$$

- (A) $f(0, 0) > f(1, 1)$ (B) $f(0, 0) < f(1, 1)$ (C) $f(0, 1) > f(1, 0)$ (D) $f(0, 1) < f(1, 0)$

例 3. 设可微函数 $u = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则下列结论中正确的是

- (A). $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于 0
(B). $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数大于 0
(C). $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于 0
(D). $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数不一定存在

例 4 (2003-1) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$,

则

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
(B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点.
(C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
(D) 根据所给条件无法判别点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.

例 5 (2014-2) 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数,

且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则

- (A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.
- (B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.
- (C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得.
- (D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得.

例 6 (2012-1, 2) 求 $f(x, y) = xe^{\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

例 7 (2009-1) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2+y^2) + y \ln y$ 的极值.

例 8 (2004-1) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

例 9. 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $f''_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$, $f'_x(x, 0) = (x+1)e^x$, $f(0, y) = y^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$ 的极值.

2. 条件极值和拉格朗日乘子法

模型：求函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值点.

方法：1) . 作拉格朗日函数 $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

$$2) . \text{解方程} \begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

(这三个方程其实是找三元函数 $L(x, y, \lambda)$ 的驻点)

3) . 根据实际条件判断所求出的点是极大值还是极小值.

此方法还可以推广到变量多于两个, 约束条件多于一个的情形.

如求函数 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \phi(x, y, z) = 0$ 下的极值点. 只需要把拉格朗日函数改为

$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\phi(x, y, z)$ 即可.

例 10 (2006-1, 2, 3) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$. (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$. (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

例 11 (2008-2) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值.

例 12. 求函数 $u = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2, x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

例 13. (2010-3) 求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值

例 14. 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆

域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值.

例 15 (2007-1) 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

第七章 多元函数积分学

【大纲要求】

1. 理解二重积分的概念, 了解二重积分的性质, 了解二重积分的中值定理. 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)(数一).
2. 了解二重积分的概念与基本性质, 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)(数二、农).
3. 了解二重积分的概念与基本性质, 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标), 了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算(数三).
4. 会用重积分求一些几何量与物理量(如平面图形的面积、弧长、质心、形心、转动惯量等)(数一、二).

第一节 二重积分

I 考点精讲

一. 基本概念

1. 二重积分

设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积. 在每个闭区域 $\Delta\sigma_i$ 上任

取一点 (ξ_i, η_i) , 并计算和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$. 如果各小闭区域的最大直径 d 趋于零时,

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$ 的极限存在, 则称该极限值为 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

2. 几何意义: 二元函数的 $z = f(x, y)$ 图像是三维空间中的一个曲面, 当 $f(x, y) \geq 0$ 时,

$\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示以 D 为底, 以该曲面为曲顶的曲顶柱体的体积.

二. 基本性质

1). 线性性质: 设 α, β 为任意实数, 则有

$$\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

2). 关于区域的可加性: 如果闭区域 D 可以被分为有限个互不相交有界闭区域的交集, 则在 D 上的二重积分等于各部分的二重积分之和.

设 D 可分为 D_1 与 D_2 ，则有 $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$

3) . $\iint_D 1 dx dy = A$ ，其中 A 为区域 D 的面积.

4) . **比较定理**：如果在 D 上恒有 $f(x, y) \leq g(x, y)$ 成立，则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

推论 1：设 M, m 分别是函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的最大值与最小值， σ 是区域 D 的面积，

则有 $m\sigma \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M\sigma$.

推论 2 (二重积分中值定理)：设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续， σ 是区域 D 的面积，

则在区域 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得 $\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta)\sigma$.

三. 二重积分的计算方法

1. 直角坐标系

1) **步骤**：画出积分区域草图；选择积分次序；确定积分上下限，做定积分计算.

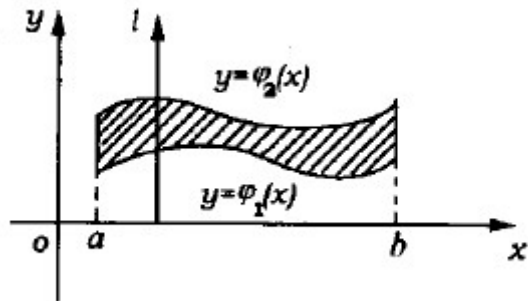
2) **确定积分次序时遵循两原则**：尽可能地避免分类讨论；尽可能地使第一步的积分简单.

3) **定限方法**（以先对 y 积分的情况为例）：

i) 画一条与 y 轴平行的直线，观察这条直线与积分区域边界的两交点（如图），下交点为下限，上交点为上限，即 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$.

ii) 使得直线与积分区域有交点的 x 的范围便是积分变量 x 的上下限，即

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$



2. 极坐标

1) 计算公式

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{\psi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

2) **适用情形**：积分区域为圆或与圆相关（扇形，环形等）；被积函数可写成 $f(x^2 + y^2)$ 或

被积函数中多次出现 $x^2 + y^2$.

3) 定限方法

i) 从原点出发画一条射线，观察这条射线与积分区域相交的部分，其中与原点距离最近的点与原点的距离即为 ρ 的下限，与原点距离最远的点与原点的距离即为 ρ 的上限.

$$\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

ii) 使得射线与积分区域相交点的角度范围便是积分变量 θ 的上下限, 即

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

3. 利用对称性

i) 如果积分区域关于 x 轴对称, 且被积函数是关于变量 y 的奇函数, 则积分值为零; 如果积分区域关于 x 轴对称, 且被积函数是关于变量 y 的偶函数, 则积分值为等于第一二象限积分的两倍.

ii) 如果积分区域关于 y 轴对称, 且被积函数是关于变量 x 的奇函数, 则积分值为零; 如果积分区域关于 y 轴对称, 且被积函数是关于变量 x 的偶函数, 则积分值为等于第一四象限积分的两倍.

iii) 特别地, 如果积分区域关于两个坐标轴都对称, 被积函数关于两个变量都是偶函数, 则积分值等于第一象限内的积分的四倍.

iv) 轮换对称性: 如果设将积分区域 D_{xy} 的变量 x, y 交换之后的区域为 D_{yx} , 则有

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{yx}} f(y, x) dx dy. \text{ 特别地, 当 } D_{xy} \text{ 关于直线 } y = x \text{ 对称时, } D_{xy} = D_{yx}, \text{ 此}$$

$$\text{时则有 } \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{xy}} f(y, x) dx dy$$

例 1 设 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$, $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, $I_2 = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, $I_3 = \iint_D (x^2 + y^2)^2 d\sigma$, 试比较 I_1, I_2, I_3 的大小.

例 2 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内连续, $h(x)$ 具有连续导数, 且 $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$,

$$D_r = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}, \text{ 则 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{D_r} f(x, y) d\sigma}{h(r^2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

例 3 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

例 4 计算二重积分 $\iint_D e^{-y^2} dx dy$ ，其中积分区域 D 是以点 $(0,0), (1,1), (0,1)$ 为顶点的三角形.

例 5 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy$ ，其中积分区域 D 是由直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域.

例 6 交换下列积分次序

$$(1) \int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx$$

$$(2) \int_0^{\pi} dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$$

例 7 (1) 设区域 $D = \{(x, y) | x \leq x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$ ，则在极坐标下二重积分 $\iint_D xy dx dy =$

()

$$(A) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^2 \cos \theta \sin \theta dr.$$

$$(B) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^3 \cos \theta \sin \theta dr.$$

$$(C) \int_0^{\pi} d\theta \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^2 \cos \theta \sin \theta dr.$$

$$(D) \int_0^{\pi} d\theta \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^3 \cos \theta \sin \theta dr.$$

(2) 设 $f(x, y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于 ()

$$(A) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(B) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

例 8 求 $I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, (x+1)^2 + y^2 \geq 1\}$

例 9. 计算重积分 $I = \iint_D xy d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$.

例 11 计算 $\iint_D [x+y+1] dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$, $[x+y+1]$ 表示 $x+y+1$ 的正数部分 (如 $[1.5] = 1$).

例 12 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2 \end{cases}$. 二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}.$$

例 13 设 $f(x) > 0$ 且连续, 试计算

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)} dx dy$$

例 14. 已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, 计算二重积分

$$\iint_D x dx dy.$$

例 15. 计算 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx$

例 16. 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$,

计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$

例 17. 设 $\int_0^a f(x) dx = A$, 证明: $\int_0^a dx \int_0^x f(x) f(y) dy = \frac{A^2}{2}$

例 18. 求 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 D 为曲线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围的平面区域.

例 19. 求 $\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$, 其中 D 为 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围的区域, f 为连续函数.

例 20. $\iint_D xydxdy$, 其中积分区域 D 是由曲线 $x^2+y^2=2x+2y-1$ 围成的区域

例 21. $\iint_D |x^2+y^2-2y|dxdy$, 其中积分区域 D 是由曲线 $x^2+y^2 \leq 4$ 围成的区域.