2026 管理类专业学位联考

综合能力

数学基础课

编讲： 陈剑博士

陈剑老师介绍

- 清华大学博士
- 数学考试大纲解析人
- 荣获腾讯 2017 年度教育企业风云人物
- 荣获央广网 2020 年度教育行业影响力人物
- 荣获搜狐 2021 年度教育行业影响力人物
- 从事数学考研辅导 23 余载（02 年至今），标准化辅导体系造就者
- 十余本经典论著，累计读者约 500 万

考生评价：多年来学员有“容易的通俗易懂，疑难的分析透彻，零基础的学有所获，数学高手另有启发”的评价，每年超高的命中率使无数零基础考生创造了轻取高分的奇迹，是业界王牌数学老师。

授课特点：理论功底深厚，实力与技巧双管齐下；讲解高屋建瓴，深入浅出与通俗易懂相互辉映；辅导脉络清晰，精辟透彻与重点突出齐头并行；知识点厚积薄发，对各层次的考生皆有照顾。

目录

条件充分性判断题

一、充分必要的定义

对两个命题 A 和 B 而言，若由命题 A 成立，肯定可以推出命题 B 也成立（即 $A \Rightarrow B$ 为真命题），则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件，或称命题 B 是命题 A 成立的必要条件.

【例 1】$x>2$是$x \geq 2$的什么条件？

(A)必要但不充分　(B)充分但不必要　(C)充分必要条件

(D)不充分不必要　(E)无法确定

二、条件与结论

两个数学命题中，通常会有“条件”与“结论”之分，若由“条件命题”的成立，肯定可以推出“结论命题”也成立，则称“条件”充分.若由“条件命题”不一定能推出(或不能推出)“结论命题”成立,则称“条件”不充分.

例如:不等式 $x^2-5x-6<0$ 能成立.

(1)$1<x<3$　(2)$x>7$

(3)$x=5$　(4)$x<6$

(5)$-1<x<6$

三、解题说明与各选项含义

本类题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论，即只要分析条件是否充分即可，而不必考虑条件是否必要.阅读条件（1）和（2）后选择：

(A)条件（1）充分，但条件（2）不充分.

(B)条件（2）充分，但条件（1）不充分.

(C)条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分.

(D)条件（1）充分，条件（2）也充分.

(E)条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分.

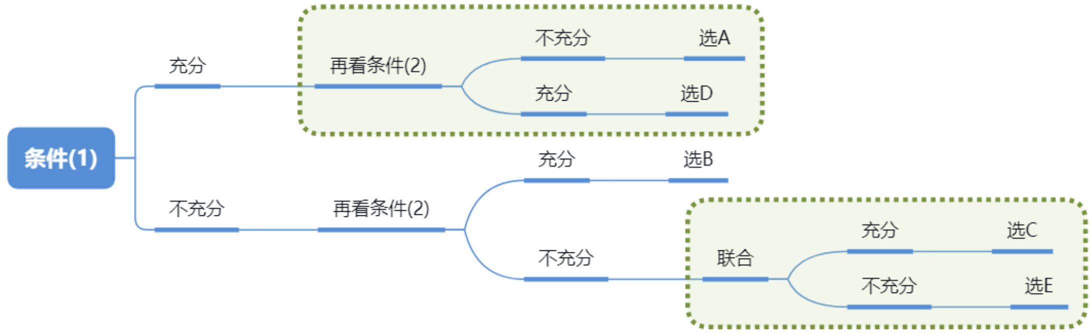
【注意】以上规定全书都适用，以后不再重复说明.

四、选项的图示描述

(1) √	(2) ×		(A)
(1) ×	(2) √		(B)
(1) ×	(2) ×	(1)+(2)联(合)立 √	(C)
(1) √	(2) √		(D)
(1) ×	(2) ×	(1)+(2)联(合)立 ×	(E)

注：“√”表示充分，“×”表示不充分，“+”表示两条件需要联合.

五、解题步骤示意图



（1）当条件（1）成立，备选 A， D．

（2）当条件（1）不成立，备选 B， C， E．

（3）当条件（2）成立，备选 B， D．

（4）当条件（2）不成立，备选 A， C， E．

（5）只有在条件（1）和（2）皆不成立时才考虑联合，备选 C， E．

六、对考生的挑战

1、运算方面，每个条件要推导判断，至少要运算两次.

2、准确度上要求高，即使一个条件判断正确，另一个条件判断错误，就会选错.只有当两个条件都判断正确，才能得分.

3、无论怎么做都有备选答案，对考生而言，不易检查.

4、容易设置陷阱题目，很容易出现“差之毫厘，谬以千里”的情况.

七、常用的求解方法

1．自下而上，即由条件带入题干

若由条件可推导出题干,则条件是题干的充分条件，解法一是解“条件充分性判断”型题的最基本的解法,应熟练掌握.其特征是至少运算两次.

若由 A 可推导出 B,则 A 是 B 的充分条件;若由 A 推导出与 B 矛盾的结论,则 A 不是 B 的充分条件.解法一是解“条件充分性判断”型题的最基本的解法,应熟练掌握.

【例 2】要保持某种货币的币值不变.

(1)　贬值 10%后又升值 10%;

(2)　贬值 20%后又升值 25%;

2．自上而下，先把题干成立的数值或范围算出，再比较条件（1）和（2）

这也叫题干等价推导法(寻找题干结论的充分必要条件)，即:要判断 A 是否是 B 的充分条件,可找出 B 的充要条件 C,再判断 A 是否是 C 的充分条件. 其特征是只需运算一次即可.

【例 3】不等式 $x(6x+5)<4$ 成立.

(1) $x > -1$　　(2) $x < \frac{1}{3}$

【例 4】 $\frac{x+2}{x-1} = 2$ 成立.

(1) $x^2 + x = 20$　　(2) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{3}{2}$

八、入门例题

【例 5】 $x \geq 3$

(1) $x = 3$

(2) $x > 3$

【例 6】 $x > 3$ 且 $x \neq 5$

(1) $x > 3$

(2) $x \neq 5$

【例 7】 $x < 3$

(1) $x < 2$

(2) $x < 4$

【例 8】 $x > 3$

(1) $x > 2$

(2) $x > 4$

【例 9】 $x = 3$

(1) $x \geq 3$

(2) $x \leq 3$

【例 10】 $x = 3$

(1) $(x-1)(x-3) = 0$

(2) $(x-2)(x-3) = 0$

【例 11】 $x = 3$

(1) $x > 3$

(2) $x < 3$

【例 12】 $2 < x < 4$

(1) $x > 1$

(2) $x < 3$

第一章 实数比例和绝对值

第一节 常见数的概念及性质

一、整数与自然数

1. 整数：整数包括正整数，0 和负整数.

$$\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}(1,2,3\cdots)\\ 0\end{array}\right\}\text{自然数}\\ \text{负整数}(-1,-2,-3\cdots)\end{cases}$$

【例 1】若 $\dfrac{4}{2m-1}$ 是整数，则整数 m 有几种取值情况？（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

【例 2】若 $\dfrac{5-3m}{3m-1}$ 是整数，则整数 m 有几种取值情况？（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

2. 自然数

(1)用来表示物体个数的 0, 1, 2, 3，……都叫自然数.

(2)最小的自然数为 0

(3)自然数包括 0 和正整数.

【例 3】3 个连续的自然数的和是 27，这 3 个自然数的最大数与最小数之积为(　).

A. 90　　B. 80　　C. 82　　D. 72　　E. 68

【例 4】A 和 B 都是自然数，且 A×B=24，则 A 与 B 的和最小是（　）.

A. 11　　B. 10　　C. 0　　D. 13　　E. 25

二、奇数与偶数

1. 奇数：

不能被 2 整除的数，可以表示为 2k+1，k 为整数.

2. 偶数：

能被 2 整除的数，可以表示为 2k，k 为整数.

3. 组合性质

奇数±奇数=偶数；奇数±偶数=奇数；偶数±偶数=偶数；

奇数×奇数=奇数；奇数×偶数=偶数；偶数×偶数=偶数.

【注意】0 是属于偶数. 两个相邻整数必为一奇一偶.

【例 5】(充分性判断题)已知 m,n 是正整数，则 m 是偶数.

(1) $3m+2n$ 是偶数　　(2) $3m^2+2n^2$ 是偶数

三、质数与合数

1. 质数

如果一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，那么这个正整数叫做质数(质数也称素数).

如 2, 3, 5……

2. 合数

一个正整数除了能被 1 和本身整除外，还能被其他的正整数整除，这样的正整数叫做合数.

如 4, 6, 8, 9……

3. 重要性质

(1)质数和合数都在正整数范围，且有无数多个.

(2)2 是唯一的既是质数又是偶数的整数，即是唯一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数. 质数中只有一个偶数 2，最小的质数为 2.

(3)1 既不是质数也不是合数.

【例 6】将 420 分解为若干质数之积，则这些质数之和为(　　).

A. 17　　B. 18　　C. 19　　D. 20　　E. 21

4. 互质数

公约数只有 1 的两个数称为互质数, 如 4 和 9.

四、平方根与算术平方根

1. 平方根：如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根.

也就是说，若 $x^2=a$，则 x 就为 a 的平方根，即 $x=\pm\sqrt{a}$

比如$(\pm 2)^2=4$，则± 2为 4 的平方根.

【评注】一个正数的平方根有两个，它们互为相反数，0 的平方根仍为 0，负数没有平方根.

2.算术平方根

一个正数a有两个互为相反数的平方根，其中将正的平方根称为 a 的算术平方根，可以表示为$\sqrt{a}$.比如 9 的平方根为± 3，但 9 的算术平方根为 3.

【评注】0 的平方根和算术平方根都为 0. $\sqrt{a}$ 也可以表示为$a^{\frac{1}{2}}$.

【例 7】一个正数的两个平方根分别为 2a-1 与-a+2,则这个正数为(　　)

A. 1　　B. 4　　C. 9　　D. 16　　E. 25

【例 8】下列说法正确的有几个(　　).

(1)100 的平方根为 10　　(2)-10 是 100 的一个平方根

(3) $\sqrt{4}=\pm 2$　　(4) $\sqrt{16}$的算术平方根的平方根为± 2

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

五、整除，倍数，约数

1.数的整除

当整数a除以非零整数 b，商正好是整数而无余数时，则称 a 能被 b 整除或 b 能整除a.

如 18÷6=3，故 18 能被 6 整除.

2.常见整除的特点

能被 2 整除的数：个位为 0，2，4，6，8.

能被 3 整除的数：各数位数字之和必能被 3 整除.

能被 4 整除的数：末两位(个位和十位)数字必能被 4 整除.

能被 5 整除的数：个位为 0 或 5.

能被 6 整除的数：同时满足能被 2 和 3 整除的条件.

能被 8 整除的数：末三位(个位、十位和百位)数字必能被 8 整除.

能被 9 整除的数：各数位数字之和必能被 9 整除.

能被 10 整除的数：个位必为 0.

【例 9】不超过 100 的正整数，能被 7 或 5 整除的有多少个？(　　).

A. 35　　B. 36　　C. 32　　D. 34　　E. 39

六、倍数，约数

倍数，约数：当a能被 b 整除时，称a是 b 的倍数，b 是a的约数.

公约数和最大公约数：几个数公有的约数，叫做这几个数的公约数；其中最大的一个，叫做这几个数的最大公约数.

公倍数和最小公倍数：几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数；其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数.

【评注】如果用a和 b 表示两个自然数，那么这两个自然数的最大公约数与最小公倍数关系是：$(a, b)\times[a, b]=a\times b$，其中$(a, b)$表示最大公约数，$[a, b]$表示最小公倍数.

【例 10】两个正整数甲数和乙数的最大公约数是 6，最小公倍数是 90.如果甲数是 18,那么乙数是 m，则 m 的各个数位之和为多少？(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

第二节 比和比例

一、比

两个数相除，又称为这两个数的比. 即 $a:b=\frac{a}{b}$. 其中 a 叫做比的前项，b 叫做比的后项. 相除所得商叫做比值. 记作 $a:b=\frac{a}{b}=k$，在实际应用中，常将比值表示成百分数，称为百分比.

【例 1】若 $a:b=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$，则 $\frac{12a+16b}{12a-8b}=$（　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. -3　　E. -2

二、比例

相等的比称为比例，记作 a :b=c:d，或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 其中 a 和 d 称为比例外项，b 和 c 称为比例内项. 当 a :b=b:d 时，称 b 为 a 和 d 的比例中项，显然当 a、b、d 均为正数时，b 是 a 和 d 的几何平均值.

【例 2】设 $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=4:5:6$，则使 $x+y+z=74$ 成立的 y 值是（　）.

A. 24　　B. 36　　C. $\frac{74}{3}$　　D. $\frac{37}{2}$　　E. 34

三、正比

若 y=kx(k 不为零)，则称 y 与 x 成正比，k 称为比例系数.

【注意】并不是 x 和 y 同时增大或减小才称为正比. 比如当 k<0 时，x 增大时，y 反而减小.

四、反比

若 y=k/x(k 不为零)，则称 y 与 x 成反比，k 称为比例系数.

【例 3】下列叙述正确的有几个？（　）.

(1)工作总量一定，工作效率和工作时间成反比例.

(2)分数的大小一定，它的分子和分母成正比例.

(3)在一定的距离内，车轮周长和它转动的圈数成反比例.

(4)正方形的边长和周长成正比.

(5)水池的容积一定，水管每小时注水量和所用时间成反比.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

【例 4】运一批煤，18 次运了 90 吨，照这样计算，多少次才能运完 140 吨煤？(　　).

A. 30　　B. 28　　C. 26　　D. 24　　E. 14

五、比例的基本性质

(1) $a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$

(2) $a:b=c:d \Leftrightarrow b:a=d:c \Leftrightarrow b:d=a:c \Leftrightarrow d:b=c:a$

【例 5】在一个比例中，两个外项互为倒数，如果一个内项是 2.5，则另一个内项是(　　).

A. 0.2　　B. 0.25　　C. 0.4　　D. 0.45　　E. 2.5

六、重要定理

1. 合比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

2. 分比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

3. 合分比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

4. 等比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}(b+d+f \neq 0)$$

【例 6】若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$，则 k 的值为（　　）.

A. 1　　B. 1 或−2　　C. −1 或 2　　D. −2　　E. 2

【例 7】已知 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$ (a,b,c 互不相等)，求 $x+y+z$ 的值.（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 2　　E. 3

第三节 绝对值

一、绝对值定义

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它相反数；零的绝对值还是零.

【例 1】已知 $\left|\dfrac{5x+3}{2x-5}\right|=\dfrac{3+5x}{5-2x}$，则实数 x 的取值范围包含几个整数？(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 无数个

【陷阱】此题在解时要把分式不等式转化为二次不等式，在转化过程中一定要注意分母不为零，否则会出现增根现象.

二、数学描述

实数 a 的绝对值定义为：$|a|=\begin{cases}a & (a\geq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

其几何意义是一个实数 a 在数轴上所对应的点,到原点的距离值.

【例 2】已知 $t^2-3t-18\leq 0$，则 $|t+4|+|t-6|=$(　　).

A. $2t-2$　　B. 10　　C. 3　　D. $2t+2$　　E. $10+t$

三、基本不等式

适合不等式 $|x|<a$（$a>0$）的所有实数所对应的就是全部与原点距离小于 a 的点，即：

$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a,(a>0)$. **同理可得：** $|x|>a\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a,(a>0)$.

【例 3】$|3x-1|<5$ 的解集中包含几个整数？(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

四、绝对值的性质

1. 对称性

$|-a|=|a|$，即互为相反数的两个数的绝对值相等.

2. 等价性

等价性：$\sqrt{a^2}=|a|$，$|a|^2=a^2 \quad (a\in R)$

【例 4】（充分性判断）$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-8x+16}=2x-5$.

(1) $2<x$　　(2) $x<4$

3. 自比性

$-|a|\le a\le|a|$，推而广之，$\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

【例 5】（充分性判断）$\dfrac{b+c}{|a|}+\dfrac{c+a}{|b|}+\dfrac{a+b}{|c|}=1$.（　）

(1) 实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$　　(2) 实数 a,b,c 满足 $abc>0$

4. 非负性：

即 $|a|\geqslant 0$，任何实数 a 的绝对值非负.

【扩展】具有非负性的数还有：

偶数次方（根式），如 $a^2,a^4,\ldots,\sqrt{a}$，$\sqrt[4]{a},\ldots$

▲考点规则：若干个具有非负性质的数之和等于零时，则每个非负数应该为零；有限个非负数之和仍为非负数.

【例 6】若实数 a, b, c 满足 $|a-3|+\sqrt{3b+5}+(5c-4)^2=0$，则 $a$bc=（　）.

A. −4　　B. $-\dfrac{5}{3}$　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{4}{5}$　　E. 3

【例 7】已知 a，b，c 是不完全相等的任意实数，若 $x=a^2-bc$，$y=b^2-ac$，$z=c^2-ab$，则 x，y，z（　）.

A. 都大于 0　　B. 至少有一个大于 0　　C. 至少有一个小于 0

D. 都不小于 0　　E. 至少有两个大于 0

第二章 应用题

第一节 比例

一、比例问题

比例问题为应用题中常考题型，比例问题支撑着应用题其他问题的技巧使用，解题常涉及比例性质的应用，如等比定理、合比定理等.

1. 变化率$=\dfrac{\text{变化量}}{\text{变前量}}\times 100\%=\dfrac{|\text{现值}-\text{原值}|}{\text{原值}}\times 100\%=\left|\dfrac{\text{现值}}{\text{原值}}-1\right|\times 100\%$

【注意】变化率包括增长率和下降率两个，所以上式用绝对值表示.

2. 增长率 $P\%$ $\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a(1+p\%)$；下降率 $P\%$ $\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a(1-p\%)$

【注意】一件商品先提价 $P\%$ 再降价 $P\%$，或者先降价 $P\%$ 再提价 $P\%$，回不到原价，应该比原价小，因为：$a(1+p\%)(1-p\%)=a(1-p\%)(1+p\%)<a$.

3. 恢复原值

原值先降 $P\%$，再增 $\dfrac{p\%}{1-p\%}$ 才能恢复原值；或者先增 $P\%$ 再降 $\dfrac{p\%}{1+p\%}$ 才能恢复原值.

4. 甲比乙大 $P\%\Leftrightarrow\dfrac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}}=P\%\Leftrightarrow$ 甲=乙（$1+p\%$）；甲是乙的 $P\%\Leftrightarrow$ 甲=乙・$P\%$

【注意】甲比乙大 $P\%\neq$ 乙比甲小 $P\%$（因为基准量不同），甲比乙大 $P\%\Leftrightarrow$ 乙比甲小 $\dfrac{p\%}{1+p\%}$

5. 总量$=\dfrac{\text{部分量}}{\text{对应占的比例}}$

【例 1】甲仓存粮 30 吨，乙仓存粮 40 吨，要再往甲仓和乙仓共运去粮食 80 吨，使甲仓粮食是乙仓粮食数量的 1.5 倍，应运往乙仓的粮食是（　）.

A. 15 吨　　B. 20 吨　　C. 25 吨　　D. 30 吨　　E. 35 吨

【例 2】若某人以 1000 元购买 A、B、C 三种商品，且所用金额之比为 1:1.5:2.5，则他购买 A、B、C 三种商品的金额(单位：元)依次是（　）.

A. 100, 300, 600　　B. 150, 225, 400　　C. 150, 300, 550

D. 200, 300, 500　　E. 200, 250, 550

【例 3】甲乙丙三名工人加工一批零件，甲工人完成了总件数的 34%，乙丙两工人完成的件数之比是 6:5，已知丙工人完成了 45 件，则甲工人完成了(　　).

A. 48 件　　B. 51 件　　C. 60 件　　D. 63 件　　E. 132 件

【例 4】菜园里的白菜获得丰收，收到 $\frac{3}{8}$ 时，装满 4 筐还多 24 斤，其余部分收完后刚好又装满了 8 筐，菜园人共收了白菜(　　).

A. 381 斤　　B. 382 斤　　C. 383 斤　　D. 384 斤　　E. 392 斤

第二节 利润问题

商品问题整体命题难度不大，但公式较多，命题较为灵活，关键点在于基准量的把握.

1. 利润=售价-进价；

2. 利润率=$\frac{利润}{进价}\times100\%=\frac{售价-进价}{进价}\times100\%=\left(\frac{售价}{进价}-1\right)\times100\%$

3. 售价=进价×(1+利润率)=进价+利润

【评注】首先要明确利润、售价、进价(成本)、销量的关系；其次在一个题目中出现多个百分比，要弄清楚每个百分比对应的基准量；然后在计算百分比时，可假设基准量为100来简化运算.

【例1】某投资者以2万元购买甲、乙两种股票，甲股票的价格为8元/股，乙股票的价格为4元/股，他们的投资额之比是4:1.在甲乙股票分别为10元/股和3元/股时，该投资者全部抛出这两种股票，他共获利(　　).

A.3000元　B.3600元　C.4000元　D.5000元　E.5300元

【例2】某商品打九折会使销售增加20%，则这一折扣会使销售额增加的百分比是(　　).

A.18%　B.10%　C.8%　D.5%　E.2%

【例3】某工厂生产某种新型产品，一月份每件产品销售得利润是出厂价的25%(假设利润等于出厂价减去成本)，二月份每件产品出厂价降低10%，成本不变，销售件数比一月份增加80%，则销售利润比一月份的销售利润增长(　　).

A.6%　B.8%　C.15.5%　D.25.5%　E.30%

【例4】某电子产品一月份按原定价的80%出售，能获利20%，二月份由于进价降低，按同样原定价的75%出售，却能获利25%，那么二月份进价是一月份的百分之(　　).

A.92　B.90　C.85　D.80　E.75

【例5】某种商品降价20%后，若欲恢复原价，应提价(　　).

A.20%　B.25%　C.22%　D.15%　E.24%

第三节 路程问题

路程问题是联考常考题型，题型难度属于中等偏上，以直线型和圆圈型两大类型为主线，以相遇与追及为模板.

1. 路程 s、速度 v、时间 t 之间的关系：

$$s=vt,t=\frac{s}{v},v=\frac{s}{t}$$

2. 对于直线型的路程问题：

(1) 相遇

$$s_{相遇}=s_1+s_2=v_1t+v_2t=\left(v_1+v_2\right)t$$

(2) 追赶

$$s_{追及}=s_1-s_2=v_1t-v_2t=\left(v_1-v_2\right)t$$

【例 1】甲乙两汽车从相距 695 公里的两地出发，相向而行. 乙汽车比甲汽车迟 2 个小时出发，甲汽车每小时行驶 55 公里，若乙汽车出发后 5 小时与甲汽车相遇，则乙汽车每小时行驶(　　).

A. 55 公里　　B. 58 公里　　C. 60 公里　　D. 62 公里　　E. 65 公里

【例 2】从甲地到乙地，水路比公路近 40 公里，上午 10:00，一艘轮船从甲地驶往乙地，下午 1:00，一辆汽车从甲地开往乙地，最后船，车同时到达乙地. 若汽车的速度是每小时 40 公里，轮船的速度是汽车的 $\frac{3}{5}$，则甲乙两地的公路长为(　　).

A. 320 公里　　B. 300 公里　　C. 280 公里　　D. 260 公里　　E. 240 公里

【例 3】A、B 两地相距 15 公里，甲中午 12 时从 A 地出发，步行前往 B 地，20 分钟后乙从 B 地出发骑车前往 A 地，到达 A 地后乙停留 40 分钟后骑车从原路返回，结果甲、乙同时到达 B 地，若乙骑车比甲步行每小时快 10 公里，则两人同时到达 B 地的时间为(　　).

A. 下午 2 时　　B. 下午 2 时半　　C. 下午 3 时　　D. 下午 3 时半　　E. 下午 4 时

【例4】甲、乙两人同时从同一地点出发，相背而行1小时后他们分别到达各自的终点A和B.若从原地出发，互换彼此的目的地，则甲在乙到达A之后35分钟到达B.问甲的速度和乙的速度之比是(　　).

A.3:5　　B.4:3　　C.4:5　　D.3:4　　E.5:3

【例 5】一批救灾物资分别随 16 列货车从甲站紧急调到 600 公里外的乙站，每列车的平均速度为 125 公里/小时.若两列相邻的货车在运行中的间隔不得小于 25 公里，则这批物资全部到达乙站最少需要的小时数为(　　).

A.7.4　　B.7.6　　C.7.8　　D.8　　E.8.2

【例 6】某人下午三点钟出门赴约，若他每分钟走 60 米，会迟到 5 分钟，若他每分钟走 75 米，会提前 4 分钟到达.所定的约会时间是下午(　　).

A.三点五十分　　B.三点四十分　　C.三点三十五分

D.三点半　　E.三点四十五分

【例 7】一辆大巴车从甲城匀速 v 行驶可按照预定时间到达乙城，但在距乙城还有 150 公里处因故障停留了半小时，因此需要平均每小时增加 10 公里才能按照预定时间到达乙城.则大巴原来速度 v 为(　　).

A.45　　B.50　　C.55　　D.60　　E.65

【例 8】两艘游艇，静水中甲艇每小时行 3.3 千米，乙艇每小时行 2.1 千米．现在两游艇于同一时刻相向出发，甲艇从下游上行，乙艇从相距 27 千米的上游下行，两艇于途中相遇后，又经过 4 小时，甲艇到达乙艇的出发地．水流速度是每小时多少千米.(　　).

A.0.1　　B.0.2　　C.0.3　　D.0.4　　E.0.5

第四节 工程问题

工程问题为常考题型，命题频率相对较高，题型难度属于中等，核心在于效率的有关计算.

1. 工作量 s、工作效率 v、工作时间 t 三者的关系：

工作量=工作效率×工作时间(s=vt)；

工作时间=$\dfrac{工作量}{工作效率}(t=\dfrac{s}{v})$；

工作效率=$\dfrac{工作量}{工作时间}(v=\dfrac{s}{t})$；

2. 重要说明

工作量：对于一个题，工作量往往是一定的，可以将总的工作量看做“1”.

工作效率：合作时，总的效率等于各效率的代数和.

3. 重要结论

若甲单独完成需要 m 天，乙单独完成需要 n 天；则：

(1)甲的效率为 1/m,乙的效率为 1/n.

(2)甲乙合作的效率为$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$；

(3)甲乙合作完成需要的时间为$\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{mn}{m+n}$.

【注意】上述公式也可以推广到多个，此处不再一一列举.

【例 1】一批货物要运进仓库.有甲乙两队合运 9 小时，可运进全部货物的 50%，乙队单独运则要 30 小时才能运完，又知甲队每小时可运进 3 吨，则这批货物共有(　　).

A. 135 吨　　B. 140 吨　　C. 145 吨　　D. 150 吨　　E. 155 吨

【例 2】制鞋厂本月计划生产旅游鞋 5000 双，结果 12 天就完成了计划的 45%，照这样的进度，这个月(按 30 天计算)旅游鞋的产量将为

A. 5625 双　　B. 5650 双　　C. 5700 双　　D. 5750 双　　E. 5800 双

【例 3】一项工程由甲、乙两人合作 30 天可完成.甲队单独做 24 天后，乙队加入，两队合作 10 天后，甲队调走，乙队继续做了 17 天才完成.若这项工程由甲队单独做，则需要(　　).

A. 60 天　　B. 70 天　　C. 80 天　　D. 90 天　　E. 100 天

【例 4】一艘轮船发生漏水事故.当漏进水 600 桶时，两部抽水机开始排水，甲机每分钟能排水 20 桶，乙机每分钟能排水 16 桶，经 50 分钟刚好将水全部排完.每分钟漏进的水有(　　).

A.12 桶　　B.18 桶　　C.24 桶　　D.30 桶　　E.32 桶

【例 5】空水槽设有甲、乙、丙三个水管，甲管 5 分钟可注满水槽，乙管 30 分钟可注满水槽，丙管 15 分钟可把满槽水放完.若三管齐开，2 分钟后关上乙管，问水槽放满时，甲管共开放了多久?(　　).

A.4 分钟　　B.5 分钟　　C.6 分钟　　D.7 分钟　　E.8 分钟

第五节 交叉法

当一个整体按照某个标准分为两部分时，可以根据杠杆原理得到交叉法，快速求出两部分的数量比. 另外，交叉法的应用不局限于平均值问题，只要涉及一个大量，一个小量以及它们混合后的中间量，一般都可以利用交叉法算出大量与小量的比例.

【例 1】公司有职工 60 人，理论知识考核平均成绩为 85 分，按成绩将公司职工分为优秀与非优秀两类，优秀职工的平均成绩为 94 分，非优秀职工的平均成绩是 79 分，则非优秀职工的人数为：(　　).

A. 36 人　　B. 30 人　　C. 28 人　　D. 24 人　　E. 20 人

【例 2】车间共有 40 人，某技术操作考核的平均成绩为 80 分，其中男工平均成绩为 83 分，女工平均成绩为 78 分. 该车间有女工(　　).

A. 16 人　　B. 18 人　　C. 20 人　　D. 24 人　　E. 28 人

【例 3】王大伯承包了 25 亩土地，今年春季改种茄子和西红柿两种大棚蔬菜，共用去了 44,000 元，其中种茄子每亩需投资 1700 元，可获纯利 2400 元；种西红柿每亩需投资 1800 元，可获纯利 2600 元，那么，王大伯一共可获纯利(　　)元.

A. 61,000　　B. 63,000　　C. 66,000　　D. 72,000　　E. 83,000

第六节 浓度问题

浓度问题命题灵活多样，公式使用为根基，在处理问题时往往以浓度计算公式为核心，同时会涉及比例问题的解题技巧以及交叉法的使用.

1.基本公式

溶液=溶质+溶剂，

$$\text{浓度}=\frac{\text{溶质}}{\text{溶液}}\times 100\%=\frac{\text{溶质}}{\text{溶质}+\text{溶剂}}\times 100\%$$

溶质=溶液×浓度

溶剂=溶液×(1-浓度)

2.重要等量关系

(1)浓度不变准则：将溶液分成若干份，每份的浓度相等，都等于原来溶液的浓度；将溶液倒掉一部分后，剩余溶液的浓度与原溶液的浓度相等.

(2)物质守恒准则：物质(无论是溶质、溶剂，还是溶液)不会增多也不会减少，前后都是守恒的.

【例 1】含盐 12.5%的盐水 40 千克蒸发掉部分水分后变成了含盐 20%的盐水，蒸发掉的水分重量为(　　)千克.

A.19　　B.18　　C.17　　D.16　　E.15

【例 2】若用浓度为 36%和 26%的甲乙两种食盐溶液配成浓度为 30%的食盐溶液 300 克，则甲比乙少取(　　)克.

A.40　　B.45　　C.50　　D.55　　E.60

【例 3】一瓶浓度为 20%的消毒液倒出 2/5 后，加满清水，再倒出 2/5 后，又加满清水，此时消毒液的浓度为(　　).

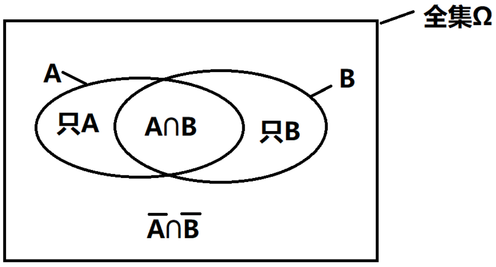
A.7.2%　　B.3.2%　　C.5.0%　　D.4.8%　　E.3.6%

第七节 集合问题

集合问题属于联考常规题目，主要涉及两个集合和三个集合的问题，难度系数不大，关键需要掌握各区域的含义及数量关系.

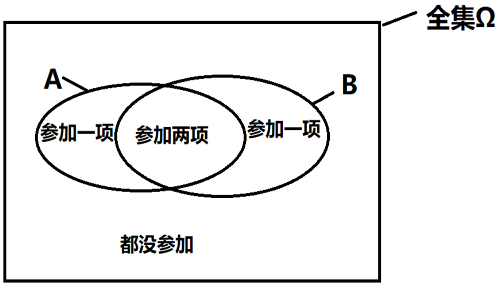
1. 两个集合

(1)按宏观区域分



公式：$A\cup B=A+B-A\cap B=\Omega-\overline{A}\cap\overline{B}$；

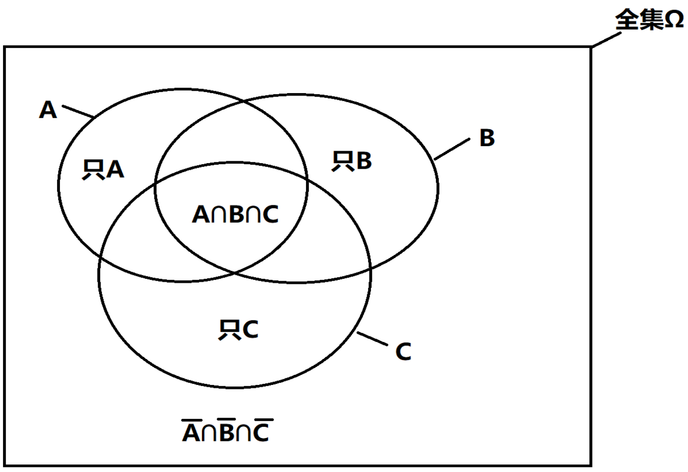
(2)按参加数量分



公式：全集=参加一项+参加两项+都没参加

2. 三个集合

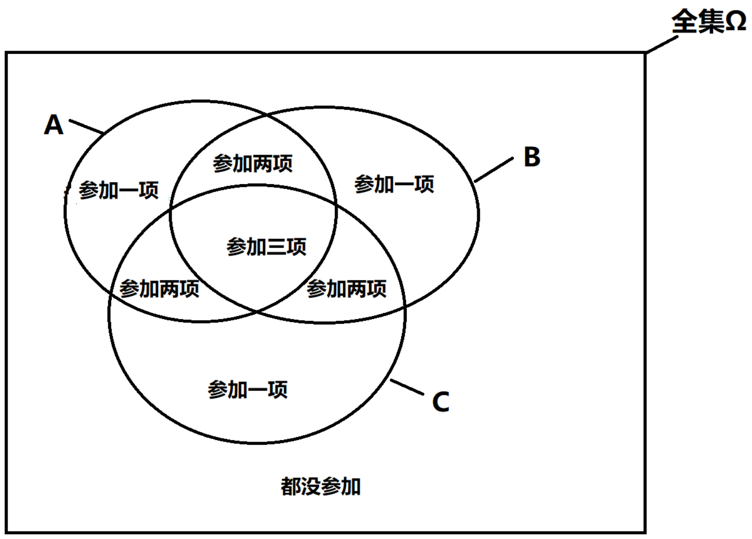
(1)按宏观区域分



公式：A∪B∪C=A+B+C-（A∩B+B∩C+A∩C）+A∩B∩C.

$A\cup B\cup C=\Omega-\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

(2)按参加数量



公式：全集=参加一项+参加两项+参加三项+都没参加

A∪B∪C=参加一项+参加两项+参加三项

A+B+C=参加一项+参加两项×2+参加三项×3

A∩B+B∩C+A∩C=参加两项+参加三项×3

【评注】区分 A∪B∪C 及 A+B+C，其中 A∪B∪C 不能出现重复的人，A+B+C 会出现重复的人.此外注意，A∩B 表示两块区域，只参加 AB 的和三个都参加的人数.

【例 1】现有 50 名学生都做物理、化学实验，如果物理实验做正确的有 40 人，化学实验做正确的有 31 人，两种实验都错的有 4 人，则两种实验都做对的有（　）.

A.27 人　　B.25 人　　C.19 人　　D.10 人　　E.8 人

【例 2】某高校对一些学生进行问卷调查。在接受调查的学生中，准备参加注册会计师考试的有 63 人，准备参加英语六级考试的有 89 人，准备参加计算机考试的有 47 人，三种考试都准备参加的有 24 人，准备只选择两种考试都参加的有 46 人，不参加其中任何一种考试的都 15 人。问接受调查的学生共有多少人？（　）.

A.120　　B.144　　C.177　　D.192　　E.196

【例 3】某年级的课外学科小组分为数学、语文、外语三个小组，参加数学小组的有 23 人，参加语文小组的有 27 人，参加外语小组的有 18 人;同时参加数学、语文两个小组的有 4 人，同时参加数学、外语小组的有 7 人，同时参加语文、外语小组的有 5 人;三个小组都参加的有 2 人。问：这个年级参加课外学科小组共有多少人?（　）.

A.42　　B.44　　C.48　　D.52　　E.54

第八节　分段计费

分段计费问题属于联考常规题目，难度系数不大，但耗时时间较长，关键点在于找到题目计费标准，以及计费部分.

1.适用情况

分段计费是指不同范围对应不同计费方式，这类问题属于联考常规题目，难度系数不大，但耗时时间较长，关键点在于找到题目计费标准，以及计费部分.生活中常用的比如：水费、电费、打车费、快递费、个税等.

2.求解过程

【例 1】某自来水公司的水费计算方法如下：每户每月用水不超过 5 吨的，每吨收费 4 元，超过 5 吨的，每吨收取较高标准的费用.已知 9 月份张家的用水量比李家的用水量多 50%，张家和李家的水费分别是 90 元和 55 元，则用水量超过 5 吨的收费标准是(　　).

A.5 元/吨　　B.5.5 元/吨　　C.6 元/吨　　D.6.5 元/吨　　E.7 元/吨

【例 2】为了调节个人收入，减少中低收入者的赋税负担，国家调整了个人工资薪金所得税的征收方案.已知原方案的起征点为 2000 元/月，税费分九级征收，前四级税率见下表：

级数	全月应纳税所得额 q(元)	税率(%)
1	$0<q\le 500$	5
2	$500<q\le 2000$	10
3	$2000<q\le 5000$	15
4	$5000<q\le 20000$	20

新方案的起征点为 3500 元／月，税费分七级征收，前三级税率见下表：

级数	全月应纳税所得额 q(元)	税率(%)
1	$0<q\le 1500$	3
2	$1500<q\le 4500$	10
3	$4500<q\le 9000$	20

若某人在新方案下每月缴纳的个人工资薪金所得税是 345 元，则此人每月缴纳的个人工资薪金所得税比原方案减少了(　　)元.

A.825　　B.480　　C.345　　D.280　　E.135

第三章 代数式和函数

第一节 有理式及运算

一、基本定义

1．整式

单项式和多项式统称为整式.

2．分式

用 A、B 表示两个整式，A÷B 就可以表示成 $\dfrac{A}{B}$ 的形式，如果 B 中含有字母，式子 $\dfrac{A}{B}$ 就叫分式，其中 A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母.

3．最简分式

一个分式的分子与分母没有公因式时，叫做最简分式.

【注意】一个分式的最后形式必须是最简分式. 分式为最简分式时通常采用约分的方法.

二、常用公式

1. 平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

【例 1】求 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$ 的值为多少？（　）.

A. $2^{16}-4$　　B. $2^{16}+2$　　C. $2^{16}-2$

D. $2^{16}+1$　　E. $2^{16}-1$

2. 完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

【例 2】已知长方形周长为 30，对角线长为 11，则长方形的面积为（　）.

A. 32　　B. 42　　C. 45

D. 50　　E. 52

3. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

【例 3】若 $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$，则 a、b、c 三者的关系为（　）.

A. $a+b=b+c$　　B. $a+b+c=1$　　C. $a=b=c$

D. $ab=bc=ac$　　E. $abc=1$

4.立方和公式：$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

5.立方差公式：$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

【例 4】若 $x^2+\frac{1}{x^2}=7$，则 $x^3+\frac{1}{x^3}=$（　）.

A. 18　　B. -18　　C. ±18　　D. ±36　　E. -36

【例 5】已知 $x^2+y^2=9$，$xy=4$，则 $\frac{x+y}{x^3+y^3+x+y}=$（　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{13}$　　E. $\frac{1}{14}$

三、整式的加减运算

【例 7】已知 $y=ax^7+bx^5+cx^3+dx+e$，其中 a, b, c, d, e 为常数，当 x=2 时，y=23；当 x=-2 时，y=-35，那么 e 的值是（　）.

A. 6　　B. -6　　C. 12　　D. -12　　E. 1

四、整式的乘法运算

【例 8】（充分性判断题）ax^2+bx+1 与 $3x^2-4x+5$ 的积不含 x 的一次方项和三次方项.（　）.

(1) $a:b=3:4$　　(2) $a=\frac{3}{5}, b=\frac{4}{5}$

【例 9】已知 $(1-kx)^3=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$ 对所有实数 x 成立. 若 $a_2=-9$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=$（　）.

A. -5　　B. -6　　C. -8　　D. -10　　E. -12

【例 10】多项式 x^3+ax^2+bx-6 的两个因式是 $x-1$ 和 $x-2$，则其第三个一次因式为(　　).

A. $x-6$　　B. $x-3$　　C. $x+1$　　D. $x+2$　　E. $x+3$

五、整式的除法运算

1. 整式的除法

整式 $F(x)$ 除以整式 $f(x)$ 的商式为 $g(x)$，余式为 $r(x)$，则有 $F(x)=f(x)g(x)+r(x)$，并且 $r(x)$ 的次数要小于 $f(x)$ 的次数.

当 $r(x)=0$ 时，$F(x)=f(x)g(x)$，此时称 $F(x)$ 能被 $f(x)$ 整除，记作 $f(x)\mid F(x)$.

2. 因式定理

$$f(x)\text{含有}(x-a)\text{因式}\Leftrightarrow f(x)\text{能被}(x-a)\text{整除}\Leftrightarrow f(a)=0$$

【例 11】若多项式 $f(x)=x^3+a^2x^2+x-3a$ 能被 $x-1$ 整除，则实数 $a=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 0 或 1　　D. 2 或-1　　E. 2 或 1

六、因式分解

考纲中并没有直接说明考因式分解，但是在整式计算，分式计算中常常涉及到，而且在解一元二次方程、一元二次不等式时，最常用的一种方法就是利用十字相乘法求方程的根，因此掌握因式分解的方法和技巧，以及熟练的对一式子进行因式分解是十分必要的.

【例 12】若 $x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$，则 $x+y$ 的值为(　　).

A. 6 或-7　　B. 6 或 7　　C. -6 或-7　　D. -6 或 7　　E. 6

第二节 集合

一、集合的概念

1. 集合

将能够确切指定的一些对象看成一个整体，这个整体就叫做集合. 简称集.

2. 元素

集合中各个对象叫做这个集合的元素.

3. 表示

集合通常用大写的拉丁字母表示，如 A、B、C、P、Q 等，元素通常用小写的拉丁字母表示，如 a、b、c、p、q 等.

二、元素与集合的关系

1. 属于

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in$A；

2. 不属于

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$

三、集合中元素的特性

1. 确定性

按照明确的判断标准给定一个元素或者在这个集合里或者不在，不能模棱两可.

2. 互异性

集合中的元素没有重复.

3. 无序性

集合中的元素没有一定的顺序(通常用正常的顺序写出)

四、集合间的基本关系：

关系＼表示	文字语言	符号语言
相等	集合 A 等于集合 B	$A = B$
子集	集合 A 是集合 B 的子集	$A \subseteq B$
真子集	集合 A 是集合 B 的真子集	A$\subsetneq$B
空集	空集	ϕ

五、常用结论

1. 任何一个集合是它本身的子集，记为 $A \subseteq A$；

2. 空集是任何集合的子集，记为$\phi \subseteq A$；空集是任何非空集合的真子集；

3. n 个元素的子集有2^n个；n 个元素的真子集有2^n-1个；n 个元素的非空子集有2^n-1个；n 个元素的非空真子集有2^n-2个.

【例 1】在以下六种写法中，错误写法的个数是(　　).

(1) $\{0\}\in\{0,1\}$　　(2) $\phi \subsetneqq \{0\}$　　(3) $\{0,-1,1\}\subseteq\{-1,0,1\}$

(4) $0\in\phi$　　(5) $Z=\{全体整数\}$　　(6) $\{(0,0)\}=\{0\}$

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

【例 2】已知$A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若$1\in A$，求实数$a$的值.(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 0

【例 3】已知集合$A=\{x|x^2-2x-8=0\},B=\{x|x^2+ax+a^2-12=0\}$，则有$B\subseteq A$.(　　).

(1) $a\le -2$　　(2) $a\ge 4$

【例 4】若$A=\{x|x^2=1\},B=\{x|x^2-2x-3=0\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\{3\}$　　B. $\{1\}$　　C. ϕ　　D. $\{-1\}$　　E. 无法确定

第三节 函数

一、一元二次函数

$$y = ax^2 + bx + c = a(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

1. 开口方向：由 a 决定，当 $a>(<)0$ 时，开口向上(下).

2. 对称轴：以 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴.

【评注】当 $a<0$ 时，当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

3. 顶点坐标：$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

4. y 轴截距：y=C.

【评注】⑴当 $c>0$ 时，抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为正；

⑵当 $c=0$ 时，抛物线与 y 轴的交点为坐标原点，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为 0；

⑶当 $c<0$ 时，抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方，即抛物线与 y 轴交点的纵坐标为负.

总结起来，c 决定了抛物线与 y 轴交点的位置.

5. 最值：当 $a>(<)0$ 时，有最小(大)值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，无最大(小)值.

【例 1】如果 $f(x)=x^2+bx+c$，对于任意实数 t 都有 $f(3+t)=f(3-t)$，那么（　）.

A. $f(3)<f(1)<f(4)$　　B. $f(1)<f(3)<f(4)$

C. $f(3)<f(4)<f(1)$　　D. $f(4)<f(3)<f(1)$

E. $f(4)<f(1)<f(3)$

【例 2】求函数 $y=x^2-2x-5$ 在区间 $[-1,5]$ 上的最大值与最小值之差为（　）.

A. 6　　B. 12　　C. 16　　D. 18　　E. 22

【例 3】已知函数 $y=x^2-4ax$，当 $1\le x\le 3$ 时，是单调递增的函数，则 a 的取值范围是（　）.

A. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$　　D. $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　E. $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$

【例 5】设 $-1\le x\le 1$，函数 $f(x)=x^2+ax+3$，当 $0<a<2$ 时，则（　）.

A. $f(x)$ 最大值是 $4+a$，最小值 $3-\dfrac{a^2}{4}$

B. $f(x)$ 最大值是 $4+a$，最小值 $4-a$

C. $f(x)$ 最大值是 $4-a$，最小值 $4+a$

D. $f(x)$ 最大值是 $4+a$，最小值 $\dfrac{5}{4}a^2+3$

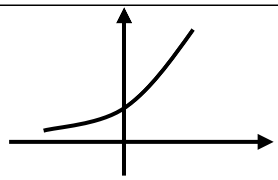
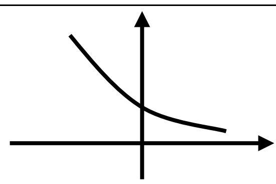
E. $f(x)$ 最大值是 $\dfrac{5}{4}a^2+3$，最小值 $4+a$

二、指数

1. 指数图像

$y=a^x(a>0,a\ne 1)$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $0<a<1$ 时，函数严格单调递减. 当 $a>1$ 时，函数严格单调递增. 且图形恒过点 $(0,1)$.

	$a>1$	$0<a<1$
		
	(1)定义域：R	
	(2)值域：(0，+∞)，即图像在 x 轴上方	
	(3)过点(0，1)，即 x=0 时，y=1.	
	当 $a>1$	当 $0<a<1$
	(5)在 R 上是增函数	(5)在 R 上是减函数

2. 指数的运算公式

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $a^0 = 1, a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

【例 6】已知函数 $f(x) = 5^x$，若 f(a+b)=3, 则 f(2a)f(2b)=(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 9　　E. 25

【例 7】若 $2^a = 3^b = 12$, 则 $\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} =$ (　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 6　　E. 12

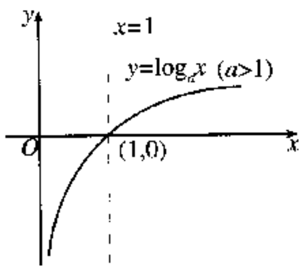
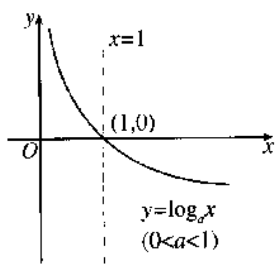
【例 8】已知点(2，1)与(1，2)在函数 f(x)=2^{ax+b} 上，求 f(-1)的值(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 6　　E. 8

三、对数

1. 对数图像

$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, 其定义域为(0, +∞), 它与 $y = a^x$ 互为反函数. 对数函数的图形过点(1, 0).

<table>
<tr><td></td><td>a>1</td><td>0<a<1</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">(1) 定义域：(0，+∞)，即图像在 y 轴右侧</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">(2) 值域：R</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">(3)过点(1，0)，即 $x=1$ 时，$y=0$</td></tr>
<tr><td>(4)在(0，+∞)上是增函数</td><td>(4)在(0，+∞)上是减函数</td></tr>
</table>

2.对数的运算公式

(1)同底对数

$\log_a^m+\log_a^n=\log_a^{mn}$；$\log_a^m-\log_a^n=\log_a^{m/n}$

(2)幂运算

$\log_{a^m}^{b^n}=\dfrac{n}{m}\log_a^b$；

尤其 m=1 时 $\log_a^{b^n}=n\log_a^b$；尤其 m=n 时，$\log_{a^n}^{b^n}=\log_a^b$

(3)换底公式

$\log_a^b=\dfrac{\log_c^b}{\log_c^a}$(换底公式)，一般 c 取 10 或 e

【注意】特别地，以 10 为底的对数叫常用对数，记作 $\log_{10}{}^N$，简记为 lgN；以无理数 e (e=2.71828…)为底的对数叫做自然对数，记作 $\log_e{}^N$，简记为 lnN.

【例 9】函数 $f(x)=\log_a(x+28)-3$ 的图像恒过定点 A，若 A 的横坐标为 x_0，函数 $g(x)=a^{x-x_0}+4$ 的图像恒过定点 B，则 B 点的坐标为(　).

A.(-9,-3)　　B.(-27,-3)　　C.(-3,5)　　D.(-2,5)　　E.(-27,5)

【例 10】设 $a_n=\log_n(n+1)$，计算 $a_2a_3a_4\cdots a_{127}$(　).

A.2　　B.4　　C.6　　D.7　　E.8

第四章 方程和不等式

第一节 方程

一、基本概念和定义

1．方程、方程的解

含有未知数的等式称为方程，能使方程左右两端相等的未知数的值为方程的解.例如：对方程 f(x)=g(x)来说.若a值存在，且使得：f(a)=g(a)成立，则 x=a是方程 f(x)=g(x)的解，又如方程为 f(x)=0 形式，其中 f(x)为代数多项式.则若存在a,使 f(a)＝0 成立，可称a为方程 f(x)＝0 的根.

2．方程的元和次

“元”是指方程中所含未知数的个数，“次”是指方程中未知数最高的指数，比如：

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 这个关于x的方程称为一元二次方程.

大纲要求掌握一元一次方程及一元二次方程.

【例 1】判定下列有几个是一元一次方程？(　　).

$2(x^2-x)+x=0$，$\frac{2}{\pi}x+1=7$，$x=0$，$x+y=1$，$x+\frac{1}{x}=3$，$x+3x$，$a=3$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 6

二、一元一次方程

含有一个未知数，且未知数的最高次数是 1 的方程，称为一元一次方程，其一般形式为：ax=b($a\neq 0$)，方程的解为$x=\frac{b}{a}$.

【例 2】如果$(m-2)x^{|m^2-3|}+5=0$是关于x的一元一次方程，求m有几种取值情况？(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

三、一元二次方程

1. 基本形式

只含一个未知数，且未知数的最高次数是二次的方程.其一般形式为：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

2. 方程解的情况

令$\Delta=b^2-4ac$，此方程的解将依Δ值的不同分为如下三种情况：

$$\Delta=b^2-4ac\begin{cases}>0 & \text{方程有两个不等实根，}x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\\ =0 & \text{方程有两个相等实根,}x_1+x_2=-\dfrac{b}{2a}\\ <0 & \text{方程无实根}\end{cases}$$

【评注】由于Δ在判断一元二次方程的解的三种情况时的重要作用，称$\Delta=b^2-4ac$为一元二次方程的判别式.

【例 3】已知a,b为有理数，并且$\sqrt{5}-2$是方程$x^2+ax+b=0$的一个根，则$a^b=$（　）.

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 4　　D. $\dfrac{1}{2}$　　E. $\dfrac{1}{4}$

3. 求根方法

(1) 十字相乘因式分解法

【例 4】关于x的二次方程$a^2x^2-\left(3a^2-8a\right)x+2a^2-13a+15=0$至少有一个整数根，则满足要求的正整数$a$有几个取值？（　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 6

(2) 求根公式法

$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两根：

令$\Delta=b^2-4ac$，此方程的解将依Δ值的不同分为如下三种情况：

Ⅰ. 当$\Delta>0$时，方程有两个不等实根，根的表达式为：x_1，$x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ⅱ. 当$\Delta=0$时，方程有两个相等实根 x_1, $x_2=-\dfrac{b}{2a}$

Ⅲ. 当$\Delta<0$时，方程无实根

4. 根与系数的关系（韦达定理）

x_1, x_2是方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根，则

x_1，x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根	$\Leftrightarrow$	$x_1+x_2=-b/a$ $x_1\cdot x_2=c/a$

※韦达定理的扩展及其应用※【利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值】

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

(2) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

(3) $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

(4) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

(5) $x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

(6) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

【例 5】若 $x^2+bx+1=0$ 的两个根为 x_1 和 x_2，且 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5$，则 b 的值是(　　).

A. -10　　B. -5　　C. 3　　D. 5　　E. 10

【例 6】若方程 $x^2+px+37=0$ 恰有两个正整数解 x_1 和 x_2，则 $\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$ 的值是(　　).

A. -2　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 1　　E. 2

【例 7】已知方程 $3x^2+5x+1=0$ 的两个根为 α 和 β，则 $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=$(　　).

A. $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$　　D. $-\frac{6\sqrt{3}}{5}$　　E. $\frac{9\sqrt{3}}{5}$

5. 两根的符号情况

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的情况有以下几种：

① 方程有两个正根 $\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \\ \Delta\geq0 \end{cases}$，

(2) 有两个负根 $\begin{cases} x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \\ \Delta\geq0 \end{cases}$，可简化为 a、b、c 同号且 $\Delta\geq0$

(3) 一正一负根 $\begin{cases} x_1\cdot x_2<0 \\ \Delta>0 \end{cases}$，可简化为 a、c 异号即可.

若再要求 $|正根|>|负根|$，有 $\begin{cases} x_1+x_2>0 \\ x_1x_2<0 \\ \Delta>0 \end{cases}$

【例 8】方程 $4x^2+(a-2)x+a-5=0$ 有两个不等的负实根，求 a 的范围中包括几个整数？(　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6　　E. 无数个

6. 两根的具体范围

【技巧】画出题干条件中的图像，然后根据区间，再讨论端点函数值与零的关系，列不等式求解.

【例 9】(充分性判断题)方程 $2ax^2-2x-3a+5=0$ 的一个根大于 1，另一个根小于 1.

(1) $a>3$　　　(2) $a<0$

【例 10】要使方程 $3x^2+(m-5)x+m^2-m-2=0$ 的两根 x_1, x_2 分别满足 $0<x_1<1$ 和 $1<x_2<2$，实数 m 的取值范围应是(　).

A. $-2<m<-1$　　B. $-4<m<-1$　　C. $-4<m<-2$

D. $\frac{-1-\sqrt{65}}{2}<m<-1$　　E. $-3<m<1$

7. 含绝对值的方程

【例 11】已知关于 x 的方程$|5x-4|+a=0$无解，$|4x-3|+b=0$有两个解，$|3x-2|+c=0$只有一个解，则化简$|a-c|+|c-b|-|a-b|$的结果是(　　).

A. $2a$　　B. 2b　　C. 2c　　D. 0　　E. $2a+b$

【例 12】方程$|3x|+|x-2|=4$的解的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

【例 13】已知关于 x 的方程$mx+2=2(m-x)$的解满足方程$|x-\frac{1}{2}|=0$，则 m 的值为(　　).

A. −1　　B. −2　　C. 2　　D. 1　　E. 3

【例 14】方程$|2x-1|=4x+5$的所有解之和为(　　).

A. 2　　B. 1　　C. −2　　D. $\frac{2}{3}$　　E. $-\frac{2}{3}$

【例 15】方程$|2x-1|-a=0$恰有两个正数解，则a的取值范围是(　　).

A. $-1<a<0$　　B. $-1<a<1$　　C. $0<a<1$　　D. $\frac{1}{2}<a<1$　　E. $-1<a<2$

【例 16】已知$x-y=4$，$|x|+|y|=7$，那么 x+y 的值是(　　).

A. ±5　　B. ±7　　C. ±9　　D. 9　　E. −9

8. 指数方程

1、指数方程的解法：

(1)同底去底法：$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$；

(2)化成对数式：$a^{f(x)}=b\Leftrightarrow a^{f(x)}=a^{\log_a b}\Leftrightarrow f(x)=\log_a b$；

(3)取同底对数：$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)}=\lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a=g(x)\lg b$.

【例 17】关于 x 的方程 $9^x-4\cdot 3^x+3=0$ 所有实根之和为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 6

9. 对数方程

2、对数方程的解法：

(1)同底去底法：$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$；

(2)化成指数式：$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow \log_a f(x)=\log_a a^b \Leftrightarrow f(x)=a^b$；

(3)取同底指数：$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)}=a^b \Leftrightarrow f(x)=a^b$.

【例 18】关于 x 的方程 $\log_2[\log_3(\log_5 x)]=0$ 的根的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 6

第二节 不等式

一、不等式的定义

用“＞”、“＜”、“≠”、“≥”及“≤”等不等号把代数式连接起来，表示不等关系的式子.

$a-b>0 \Leftrightarrow a>b$，$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$，$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$

二、不等式的分类

1. 矛盾不等式

不等式只是表示了某种不等关系，它表示的关系可能在任何条件下都不成立，这样的不等式叫矛盾不等式；如 2＞3，$x^2<0$

2. 绝对不等式

它表示的关系可能在任何条件下都成立，这样的不等式叫绝对不等式；

3. 条件不等式

在一定条件下才能成立的不等式叫条件不等式.

三、不等式的基本性质：（注意等价关系）

1. 传递性

$a>b,b>c \Rightarrow a>c$；

2. 同向相加性

$$\left.\begin{matrix} a>b \\ c>d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c>b+d；$$

3. 同向皆正相乘性

$$\left.\begin{matrix} a>b>0 \\ c>d>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac>bd；$$

4. 皆正倒数性

$$a>b>0 \Rightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0；$$

5. 皆正乘(开)方性

$$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n>0 \qquad (n\in Z^+)$$

【例 1】下列说法不正确的是（　　）.

A. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$ $(c\neq 0)$　　B. 若 $a>b$，则 $b<a$

C.若a>b，则－a>－b D.若a>b，b>c，则a>c

E.若|a|>|b|，则a^2>b^2

四、一元一次不等式

【例 2】如果不等式$\begin{cases}2x-1>3(x-1)\\x<m\end{cases}$的解集是 x＜2，那么 m 的取值范围是( ).

A.m＝2 B.m＞2 C.m＜2 D.m≥2 E.m≤2

【例 3】若不等式组$\begin{cases}5-3x\ge 0\\x-m\ge 0\end{cases}$有实数解．则实数 m 的取值范围是( ).

A. $m\le\frac{5}{3}$ B. $m<\frac{5}{3}$ C. $m>\frac{5}{3}$ D. $m\ge\frac{5}{3}$ E. m>1

【例 4】若关于 x 的不等式组$\begin{cases}x-3(x-2)<4\\3x-a<2x\end{cases}$无解，则$a$的取值范围是( ).

A. a＜1 B. a≤1 C. 1 D. a≥1 E. a>1

【例 5】关于 x 的不等式$\begin{cases}x-m<0\\7-2x\le 1\end{cases}$的整数解共有 4 个，则 m 的取值范围是( ).

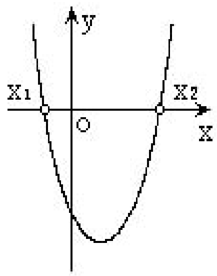
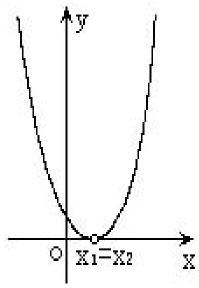
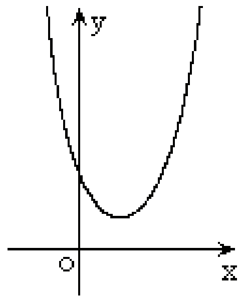
A.6＜m＜7 B.6≤m＜7 C.6≤m≤7 D.6＜m≤7 E.6<m<8

【例 6】某城市的一种出租车起步价是 7 元(即在 3km 以内的都付 7 元车费)，超过 3km 后，每增加 1km 加价 1.2 元(不足 1km 按 1km 计算)，现某人付了 14.2 元车费，求这人乘的最大路程是( ).

A.10km B.9km C.8km D.7km E.6km

五、一元二次不等式

抛物线、方程、不等式的关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数： $y=ax^2+bx+c$ （$a>0$） 图象	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 
一元二次方程： $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x<x_1或x>x_2\}$	$\left\{x\middle\vert x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

【注意】表中只列出了 $a>0$ 的情况.

【例 7】已知 $-2x^2+5x+c\geq 0$ 的解集为 $-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$，则 c 为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　　　B. 3　　　　C. $-\frac{1}{3}$　　　　D. -3　　　　E. 2

【例 8】一元二次不等式 $3x^2-4ax+a^2<0(a<0)$ 的解集是(　　).

A. $\frac{a}{3}<x<a$　　　　B. $x>a或x<\frac{a}{3}$　　　　C. $a<x<\frac{a}{3}$

D. $x>\frac{a}{3}或x<a$　　　　E. $a<x<3a$

【例 9】(充分性判断题)不等式 $ax^2+(a-6)x+2>0$ 对所有实数 x 成立.(　　).

(1) $0<a<3$　　(2) $1<a<5$

【例 10】不等式 $(x^4-4)-(x^2-2)\ge 0$ 的解集是（　）.

A. $x\ge\sqrt{2}$或$x\le-\sqrt{2}$　B. $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$　C. $x>\sqrt{3}$或$x<-\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$　E. 空集

六、绝对值不等式

1. 定义法

即利用 $|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$ 去掉绝对值再解.

【例 11】不等式 $\left|\frac{x}{x+2}\right|>\frac{x}{x+2}$ 的解集中包含几个整数？（　）.

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3　E. 无数个

2. 公式法

$|x|>a$ 与 $|x|<a$ 型的不等式的解法.

当 $a>0$ 时，不等式 $|x|>a$ 的解集是 $\{x|x>a,或x<-a\}$

不等式 $|x|<a$ 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$；

当 $a<0$ 时，不等式 $|x|>a$ 的解集是 $\{x|x\in R\}$

不等式 $|x|<a$ 的解集是 $\varnothing$；

【例 12】关于 x 的不等式 $\frac{1}{|2x-3|}>2$ 的解集中包含几个整数？（　）.

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3　E. 无数个

【例 13】关于 x 的不等式 $\left|x^2+3x-8\right|<10$ 的解集中包含几个整数？（ ）.

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 无数个

3. 平方法

解 $|f(x)|>|g(x)|$ 型不等式.

【例 15】不等式 $|x-1|>|2x-3|$ 的解集中包含几个整数？（ ）.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 无数个

4. 分段讨论

即通过合理分类去绝对值后再求解.

【例 16】不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的解集中包含几个整数？（ ）.

A. 0 B. 3 C. 4 D. 5 E. 无数个

5. 几何法：即转化为几何知识求解.

【例 17】对任何实数 x，不等式 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立，则 k 的取值范围为（ ）.

A. k<3 B. k<-3 C. k≤3 D. k≤-3 E. k>3

七、指数不等式

指数不等式的解法：

1. 同底去底法

$a>1$时，$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$；

$0<a<1$时，$a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

2. 化成对数式

$a>1$时，$a^{f(x)}<b \Leftrightarrow a^{f(x)}<a^{\log_a b} \Leftrightarrow f(x)<\log_a b$；

$0<a<1$时，$a^{f(x)}<b \Leftrightarrow a^{f(x)}<a^{\log_a b} \Leftrightarrow f(x)>\log_a b$；

3. 取同底对数

$a^{f(x)}<b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)}<\lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\lg a<g(x)\lg b$.

【例 18】不等式$2^{2x-1}-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}<8$的解集中包含几个整数？（　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 无数个

八、对数不等式

对数不等式的解法：

1. 同底去底法

$a>1$时，$\log_a f(x)<\log_a g(x) \Leftrightarrow 0<f(x)<g(x)$；

$0<a<1$时，$\log_a f(x)<\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)>0$；

2. 化成指数式

$a>1$时，$\log_a f(x)<b \Leftrightarrow \log_a f(x)<\log_a a^b \Leftrightarrow 0<f(x)<a^b$；

$0<a<1$时，$\log_a f(x)<b \Leftrightarrow \log_a f(x)<\log_a a^b \Leftrightarrow f(x)>a^b>0$.

【例 19】不等式$\log_{x+1}(x^2-x-2)>1$的解集中包含几个整数？（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 无数个

第三节 均值不等式

一、算术平均值

设 n 个数 $x_1,x_2,\ldots\ldots$，x_n，称 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，简记为 $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$.

二、几何平均值

设 n 个正数 $x_1,x_2,\ldots\ldots$，x_n，称 $x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots\ldots x_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值，简记为 $x_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$.

【注意】几何平均值是对于正数而言.

【例 1】三个实数 1, x-2 和 x 的几何平均值等于 4, 5 和-3 的算术平均值，则 x 的值为(　　).

A. －2　　B. 4　　C. 2　　D. －2 或 4　　E. 2 或 4

三、均值不等式

当 $x_1,x_2,\ldots\ldots$，x_n 为 n 个正数时，它们的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\ldots x_n}\quad(x_i>0,\ i=1,\ldots,\ n)$$

当且仅当 $x_1=x_2=\ldots\ldots=x_n$ 时，等号成立.

四、常用结论

1. 任意实数成立

(1) 若 $a,b\in R$，则 $a^2+b^2\geq 2ab$

(2) 若 $a,b\in R$，则 $ab\leq\dfrac{a^2+b^2}{2}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）

2. 正实数成立

(1) 若 $a,b\in R^+$，则 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

(2)若 $a,b\in R^{+}$，则 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）

(3)若 $a,b\in R^{+}$，则 $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2}$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）

3. 倒数情况

(1)若 $x>0$，则 $x+\frac{1}{x}\geq 2$（当且仅当 $x=1$ 时取“=”）；若 $x<0$，则 $x+\frac{1}{x}\leq -2$（当且仅当 $x=-1$ 时取“=”）

(2)若 $x\neq 0$，则 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$即$x+\frac{1}{x}\geq 2$或$x+\frac{1}{x}\leq -2$（当且仅当 $a=b$ 时取“=”）

五、做题应用及易错点

1. 最值口诀

当两个正数的积为定值时，可以求它们的和的最小值，

当两个正数的和为定值时，可以求它们的积的最大值，

正所谓“积定和最小，和定积最大”.

2. 最值条件

求最值的条件“一正，二定，三等”.

先验证给定函数是否满足最值三条件：(1)各项均为正，(2)乘积(或者和)为定值，(3)等号能否取到；然后利用平均值公式求出最值.

3. 应用

均值定理在求最值、比较大小、求变量的取值范围、证明不等式、解决实际问题方面有广泛的应用.

【例 2】下列结论正确的是(　　).

A. 当 x>0 且 x≠1 时，$\lg x+\frac{1}{\lg x}\geqslant 2$　　B. 当 x>0 时，$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geqslant 2$

C. 当 x≥2 时，$x+\frac{1}{x}$的最小值为 2　　D. 当 0<x≤2 时，$x-\frac{1}{x}$无最大值

E. 以上均不正确

【例 3】已知 $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=1$(x>0，y>0)，则 xy 的最小值是(　　).

A. 15　　B. 6　　C. 60　　D. 1　　E. 4

【例 4】在区间$[\frac{1}{2}，2]$上，函数 $f(x)=x^{2}+bx+c$(b、c∈R)与 $g(x)=\frac{x2+x+1}{x}$在同一点取得相

同的最小值，那么 f(x) 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值是(　　).

A. $\frac{13}{4}$　　B. 4　　C. 8　　D. $\frac{5}{4}$　　E. 5

六、技巧总结

1. 变号

【例 5】函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}+3$ 在 $(-\infty, -2]$ 上(　　).

A. 无最大值，有最小值 7　　B. 无最大值，有最小值 −1

C. 有最大值 7，有最小值 −1　　D. 有最大值 −1，无最小值

E. 无最大值也无最小值

2. 凑项

【例 6】已知 $x<\frac{5}{4}$，求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6　　E. 8

3. 分离

【例 11】求 $y=\frac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$ 的最小值(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6　　E. 9

4. 统一变量

【例 12】已知 $x>0$，$y>0$，$x+2y+2xy=8$，则 $x+2y$ 的最小值是(　　).

A. 3　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{11}{2}$　　E. 5

第五章 数列

第一节 一般数列

一、基本定义

1．数列的定义：按一定次序排列的一列数.

一般形式：$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$简记为$\{a_n\}$

【注意】它可以理解为以正整数集(或它的有限子集)为定义域的函数. 运用函数的观念分析和解决有关数列问题，是一条基本思路. 递推是数列特有的表示法，它更能反映数列的特征.

2．通项公式： $a_n = f(n)$（第 n 项a_n与项数 n 之间的函数关系）.

并非每一个数列都可以写出通项公式；有些数列的通项公式也并非唯一的.

3．数列前 n 项和

记为 $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$

4．数列的分类

①按项分类

有穷数列：项数有限；无穷数列：项数无限.

②按a_n的增减性分类

递增数列（$a_n>a_{n-1}$）；递减数列（$a_n<a_{n-1}$）；摆动数列（例：—1，1，—1，1…）；常数数列（例：6，6，6，…）；有界数列；无界数列.

5．递推公式

a_n与其前后项之间的关系式称为递推公式

若已知数列的递推关系式及首项，可以写出其他项，因此递推公式是确定数列一种重要方式.

例如：**数列**｛a_n｝中，$a_1=1$, 对所有的 n≥ 2 都有 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots a_n=n^2$；

（1） 求a_3+a_5；

（2） $\frac{256}{225}$是这数列中的项吗？

解题思路分析：

据题设$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots a_{n-1}=(n-1)^2$, 而$a_n = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}}$

$\therefore a_n=\frac{n^2}{(n-1)^2}$ (n≥2)

由此可以求得 $a_3+a_5=\frac{61}{16}$，令 $\frac{256}{225}=\frac{n^2}{(n-1)^2}$，可以判断 $\frac{256}{225}$ 是这数列中的第 16 项.

二、a_n 与 S_n 的关系

1. 已知 a_n，求 S_n.

公式：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$

【技巧】采用对通项裂项，进而采用相消求和法.这是分解与组合思想在数列求和中的具体应用.裂项法的实质是将数列中的每项(通项)分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的.通项分解*(裂项)*如：

(1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

(2) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(3) $a_n=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

(4) $a_n=n\cdot n!=(n+1-1)n!=(n+1)!-n!$

【例 1】已知 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，求 S_{100}.(　).

A. $\frac{99}{101}$　B. $\frac{100}{101}$　C. $\frac{99}{100}$　D. $\frac{1}{101}$　E. $\frac{1}{100}$

【例 2】数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，若前 n 项的和为 10，则项数 $n=$(　).

A. 100　B. 110　C. 120　D. 121　E. 124

2. 已知S_n，求a_n

$$a_n=\begin{cases}a_1=S_1 \\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$$

【例 3】已知下列数列$\{a_n\}$前n项和$S_n=n^2+1$，求a_5的值.（　）.

A. 9　B. 8　C. 6　D. 4　E. 16

【例 4】已知数列$\{a_n\}$的前n和S_n满足$\log_2(S_n+1)=n+1$，　求$a_5+a_6+a_7+a_8$（　）.

A. 452　B. 460　C. 480　D. 520　E. 580

第二节 等差数列

一、定义

如果在数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\in N)$,则称数列$\{a_n\}$为等差数列，d为公差.

二、通项公式

1. 基本公式

$a_n=a_1+(n-1)d$

2. 扩展公式

$a_n=a_k+(n-k)d$

3. 函数特征

当公差 d 不为零时，可将其抽象成关于 n 的一次函数 $f(n)=dn+(a_1-d)$，

其斜率为一次项系数 d，一次函数各项系数之和为首项，在 y 轴上的截距为(a_1-d).

如: $a_n=3n-5$. 可知有些通项公式的数列是一个等差数列，且公差是 3，首项为-2.

【例 1】等差数列中，$a_1=2$，$a_4+a_5=-3$，该等差数列的公差是(　　).

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2　　E. 3

【例 2】在等差数列中, 若$a_1=3, a_n=21, d=2$, 求n. (　　).

A. 10　　B. 6　　C. 12　　D. 15　　E. 20

三、前 n 项和公式(重点)

1. 基本公式

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

【评注】本公式用于已知首末项和项数时的求和.

2. 扩展公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

【评注】本公式用于已知首项、公差和项数时的求和.

3. 函数特征

$S_n=(\frac{d}{2})n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

当公差 d 不为 0 时，可将其抽象成关于 n 的二次函数 $f(n)=(\frac{d}{2})n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，

【例 3】已知数列$\{a_n\}$前 n 项和$S_n=n(2n+1)$，判断 39 是该数列的第几项.（　）.

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9　　E. 10

【例 4】在等差数列$\{a_n\}$中，$S_4=12,S_{10}=150,$ 则 S_{18} 为（　）.

A. 558　　B. 568　　C. 572　　D. 628　　E. 658

四、等差数列的性质

1. 元素性质

若 m, n, l, $k\in Z^+$，m+n=l+k, 则 $a_m+a_n=a_l+a_k$.

【注意】可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是脚码之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等. 如：$a_2+a_8+a_{12}=a_4+a_7+a_{11}\neq a_6+a_{16}$（因为项数不同）

【例 5】已知等差数列$\{a_n\}$中，a_1和a_{10}是方程$x^2-3x-5=0$的两根，那么$a_3+a_8=$（　）.

A. 3 或-3　　B. 4　　C. 3　　D. -3　　E. -4

【例 6】在等差数列中:若$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=48,$ 求 S_{12}.（　）.

A. 96　　B. 48　　C. 144　　D. 160　　E. 240

2. 求和性质

若S_n为等差数列前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$,…仍为等差数列，其公差为n^2d.

【例 7】已知等差数列$\{a_n\}$，S_n为前n项和，$S_4=30,S_8=90$，则S_{12}为（　）.

A. 150　　B. 160　　C. 180　　D. 190　　E. 200

第三节 等比数列

一、定义

如果在数列$\{a_n\}$中,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数)$(n\in N)$,则称数列$\{a_n\}$为等比数列，q为公比.

二、通项

1. 基本公式

$a_n=a_1q^{n-1}$

2. 扩展公式

$a_n=a_kq^{n-k}$

【例 1】若$2,2^x-1,2^x+3$成等比数列, 则$x=$(　　).

A. $\log_2 5$　　B. $\log_2 6$　　C. $\log_2 7$　　D. 3　　E. 4

【例 2】若方程$(a^2+c^2)x^2-2c(a+b)x+b^2+c^2=0$有实根，则(　　).

A. a,b,c成等比数列　　B. a,c,b成等比数列　　C. b,a,c成等比数列

D. a,b,c成等差数列　　E. b,a,c成等差数列

【例 3】设$3^a=4$，$3^b=8$，$3^c=16$，则a，b，c(　　).

A. 是等比数列，但不是等差数列　　B. 是等差数列，但不是等比数列

C. 既是等比数列，也是等差数列　　D. 既不是等比数列，也不是等差数列

E. 无法判断

【例 4】等比数列$\{a_n\}$中, 若$a_4a_7=-512,a_3+a_8=124$, 且公比为$q\in Z$, 求a_{10}. (　　).

A. 124　　B. 64　　C. 512　　D. -124　　E. -512

三、前 n 项和公式

$$S_n=\begin{cases} na_1(q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 0\text{且}q\neq 1) \end{cases}$$

【注意】$q\neq 1$ 时，$\dfrac{S_n}{S_m}=\dfrac{1-q^n}{1-q^m}$.

【例 5】在各项为正的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1a_3=36,a_2+a_4=60,S_n>400$，求 n 的最小值.（　）.

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7　　E. 8

四、所有项和 S

1. 条件

只有对于无穷递缩等比数列（$|q|<1,q\neq 0$），才存在所有项和.

2. 公式

所有项和 $S=\dfrac{a_1}{1-q}$.

【理解】当 $n\to\infty$ 时，$q^n\to 0$，所以 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}\to S=\dfrac{a_1}{1-q}$.

【注意】等差数列不存在所有项和.

五、等比数列的性质

1. 若 m, n, l, $k\in Z^+$，m+n=l+k，则 $a_m\cdot a_n=a_l\cdot a_k$.

【例 6】对于等比数列 $\{a_n\}$，已知 a_4,a_{12} 是方程 $2x^2-11x+6=0$ 的两根，则 $a_8=$（　）.

A. $\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. ± 3　　E. -3

2. 若 S_n 为等比数列前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，……仍为等比数列，其公比为 q^n.

【例 7】在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_4=36,S_8=54$，则 $S_{12}=$（　）.

A. 63　　B. 68　　C. 76　　D. 89　　E. 92

第六章 平面几何

第一节 三角形

一、角的概念

1.角的定义

有公共端点的两条射线组成的图形叫做角，这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边.当角的两边在一条直线上时，组成的角叫做平角.

平角的一半叫做直角；小于直角的角叫做锐角；大于直角且小于平角的角叫做钝角.

如果两个角的和是一个直角，那么这两个角叫做互为余角，其中一个角叫做另一个角的余角.

如果两个角的和是一个平角，那么这两个角叫做互为补角，其中一个角叫做另一个角的补角.

2.角的表示

角可以用大写英文字母、阿拉伯数字或小写的希腊字母表示，具体的有以下四种表示方法：

①用数字表示单独的角，如∠1，∠2，∠3等.

②用小写的希腊字母表示单独的一个角，如∠α，∠β，∠γ，∠θ等.

③用一个大写英文字母表示一个独立(在一个顶点处只有一个角)的角，如∠B，∠C等.

④用三个大写英文字母表示任一个角，如∠BAD，∠BAE，∠CAE等.

【注意】用三个大写英文字母表示角时，一定要把顶点字母写在中间，边上的字母写在两侧.

3.角的平分线及其性质

一条射线把一个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线.

角的平分线有下面的性质定理：

(1)角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

(2)到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

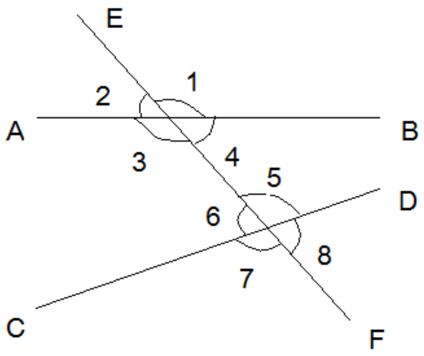
二、相交线中的角

1.邻补角与对顶角

两条直线相交，可以得到四个角，我们把两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点但没有公共边的两个角叫做对顶角.我们把两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点且有一条公共边的两个角叫做邻补角.

2.邻补角互补，对顶角相等.

直线AB，CD与EF相交(或者说两条直线AB，CD被第三条直线EF所截)，构成八个角.其中∠1与∠5这两个角分别在AB，CD的上方，并且在EF的同侧，像这样位置相同的一对角叫做同位角；∠3与∠5这两个角都在AB，CD之间，并且在EF的异侧，像这样位置的两个角叫做内错角；∠3与∠6在直线AB，CD之间，并侧在EF的同侧，像这样位置的两个角叫做同旁内角.



2. 垂线

两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就说这两条直线互相垂直. 其中一条直线叫做另一条直线的垂线，它们的交点叫做垂足.

直线 AB，CD 互相垂直，记作“AB⊥CD”（或“CD⊥AB”），读作“AB 垂直于 CD”（或“CD 垂直于 AB”）.

垂线的性质：

性质 1：过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

性质 2：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短. 简称：垂线段最短.

三、平行线

1. 平行线的概念

在同一个平面内，不相交的两条直线叫做平行线. 平行用符号“∥”表示，如“AB∥CD”，读作“AB 平行于 CD”.

同一平面内，两条直线的位置关系只有两种：相交或平行.

【注意】(1)平行线是无限延伸的，无论怎样延伸也不相交.

(2)当遇到线段、射线平行时，指的是线段、射线所在的直线平行.

2. 平行线公理及其推论

平行公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

推论：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

3. 平行线的判定

平行线的判定公理：两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行. 简称：同位角相等，两直线平行.

平行线的两条判定定理：

(1)两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么两直线平行. 简称：内错角相等，两直线平行.

(2)两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么两直线平行.简称：同旁内角互补，两直线平行.

补充平行线的判定方法：

(1)平行于同一条直线的两直线平行.

(2)垂直于同一条直线的两直线平行.

(3)平行线的定义.

4．平行线的性质

(1)两直线平行，同位角相等.

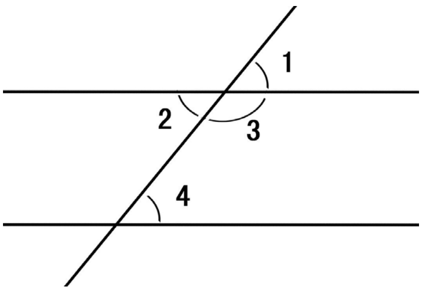
(2)两直线平行，内错角相等.

(3)两直线平行，同旁内角互补.

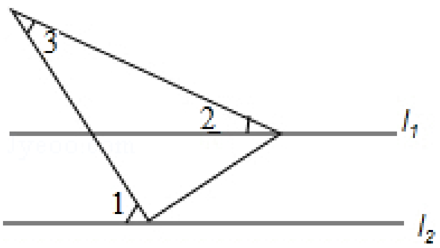
如下图：∠1与∠4同位角，同位角相等；

∠2与∠4是内错角，内错角相等；

∠3与∠4同旁内角，同旁内角互补.

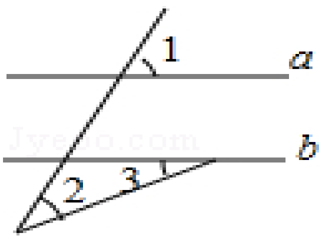


【例1】如图，直线 $l_1 \parallel l_2$，∠1=50°，∠2=22°，则∠3的度数为(　　).



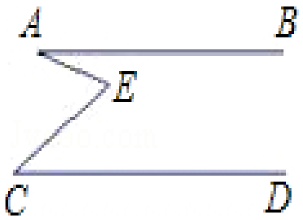
A. 28°　　B. 38°　　C. 68°　　D. 82°　　E. 84°

【例2】如图，直线 $a \parallel b$，∠1=50°，∠2=30°，则∠3的度数为(　　).



A. 20°　　B. 30°　　C. 40°　　D. 50°　　E. 60°

【例 3】如图，AB∥CD，且∠A=25°，∠C=45°，则∠E 的度数是(　).



A. 60°　　B. 70°　　C. 110°　　D. 80°　　E. 86°

二、三角形内角与外角

1. 内角

三角形内角和为 180°.

【评注】在同一个三角形中：等角对等边；等边对等角；大角对大边；大边对大角.

2. 外角

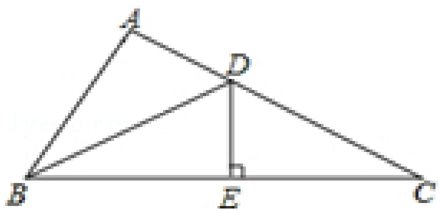
三角形外角等于不相邻的两个内角之和.

【例 4】等腰三角形的一内角为 40°，则顶角为(　)度.

A. 40　　B. 100　　C. 50 或 100　　D. 40 或 100　　E. 40 或 70

【例 5】如图，在ΔABC 中，∠C=31°，∠ABC 的平分线 BD 交 AC 于点 D，如果 DE 垂直平分 BC，那么∠A=(　).

A. 55°　　B. 67°　　C. 77°　　D. 87°　　E. 92°



三、三角形三边关系

1. 三边关系

任意两边之和大于第三边，即 $a+b>c$；

任意两边之差小于第三边，即$|a-b|<c$

【评注】两句话是等价的，只要满足其中一个要求就可以构成三角形.在判断三个长度能否组成三角形，我们只用做一个判断，那就是，最小的两边相加大于最大边即可.

【例 6】等腰三角形的两边分别等于 3、6，则它的周长为（　）.

A. 11　　B. 12　　C. 15　　D. 16　　E. 12 或 16

【例 7】长度分别为 2，7，x 的三条线段能组成一个三角形，整数 x 的值有几种情况（　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

【例 8】若一个三角形的三边长均为整数，其中两边长分别为 2 和 4，则该三角形的周长有几种取值（　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

【例 9】已知a，b，c 是△ABC 的三条边长，化简$|a+b-c|-|c-a-b|$的结果为（　）.

A. $2a+2b-2c$　　B. $2a+2b$　　C. $2c$　　D. 0　　E. a

四、三角形的分类

按边分类按角分类

- 三角形
  - 等腰三角形
    - 底边和腰不相等的等腰三角形
    - 等边三角形
  - 不等边三角形

- 三角形
  - 直角三角形
  - 斜三角形
    - 锐角三角形
    - 钝角三角形

1. 直角三角形

(1)直角三角形的两个锐角互余

可表示如下：∠C=90° ⇒ ∠A+∠B=90°

(2)在直角三角形中，30° 角所对的直角边等于斜边的一半. 可表示如下：

$$\left.\begin{array}{r}\angle A=30^\circ\\ \angle C=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow BC=\frac{1}{2}AB$$

(3)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可表示如下：

$$\left.\begin{array}{r}\angle ACB=90^\circ\\ D\text{为}AB\text{的中点}\end{array}\right\}\Rightarrow CD=\frac{1}{2}AB=BD=AD$$

(4)勾股定理

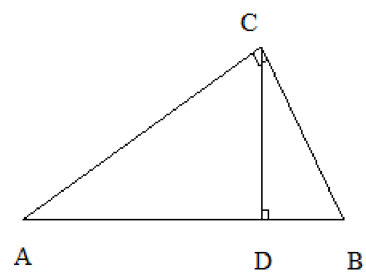
直角三角形两直角边 a，b 的平方和等于斜边 c 的平方，即 $a^2+b^2=c^2$

常用的勾股数：(3, 4, 5)；(6, 8, 10)；(5, 12, 13)；(7, 24, 25)；(8, 15, 17)；(9, 12, 15)

(5)射影定理

在直角三角形中，斜边上的高线是两直角边在斜边上的投影的比例中项，每条直角边是它们在斜边上的投影和斜边的比例中项

$$\left.\begin{array}{r}\angle ACB=90^\circ\\ CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}CD^2=AD\bullet BD\\ AC^2=AD\bullet AB\\ BC^2=BD\bullet AB\end{array}\right.$$



(6)常用关系式

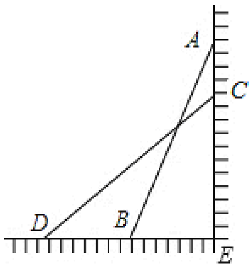
由三角形面积公式可得：AB • CD=AC • BC

等腰直角三角形的三边之比：$1:1:\sqrt{2}$；

等腰直角三角形的面积：$S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}c^2$，其中 a 为直角边，c 为斜边.

内角为 30°、60°、90° 的直角三角形三边之比为：$1:\sqrt{3}:2$.

【例 10】如图，一根长为 2.5 米的梯子斜靠在垂直于地面的墙上，这时梯子的底端 B 离开墙根为 0.7 米，如果梯子的底端向外(远离墙根方向)移动 0.8 米至 D 处，则梯子的顶端将沿墙向下移动(　　).



A. 0.8 米　　B. 0.7 米　　C. 0.4 米　　D. 0.3 米　　E. 0.2 米

2. 等腰三角形

(1)等腰三角形的性质定理及推论：

定理：等腰三角形的两个底角相等(简称：等边对等角)

推论：等腰三角形顶角平分线平分底边并且垂直于底边.即等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合.

(2)等腰三角形的其他性质：

①等腰直角三角形的两个底角相等且等于 45°

②等腰三角形的底角只能为锐角，不能为钝角(或直角)，但顶角可为钝角(或直角).

③等腰三角形的三边关系：设腰长为 a，底边长为 b，则 $\frac{b}{2}<a$

④等腰三角形的三角关系：设顶角为∠A，底角为∠B、∠C，则∠A=180°—2∠B，∠B=∠C=$\frac{180°-\angle A}{2}$.

【例 11】已知 x=2 是关于 x 的方程 $x^2-2mx+3m=0$ 的一个根，并且等腰三角形 ABC 的腰和底边长恰好是这个方程的两个根，则△ABC 的周长为(　　).

A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15　　E. 16

3. 等边三角形

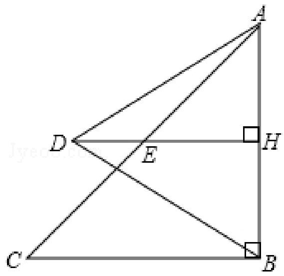
等边三角形的各个角都相等，并且每个角都等于 60°.

等边三角形高与边的比：$\sqrt{3}:2=\frac{\sqrt{3}}{2}:1$.

等边三角形的面积：$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，其中 a 为边长.

【例 12】如图：△ABC 是等腰直角三角形，∠ABC=90°，AB=10，D 为△ABC 外一点，连接 AD、 BD，过 D 作 DH⊥AB，垂足为 H，交 AC 于 E．若△ABD 是等边三角形，求 DE 的长(　　)．

A. $5\sqrt{3}-5$　　B. $5\sqrt{3}-3$　　C. $5\sqrt{3}+5$　　D. $5\sqrt{3}+3$　　E. $3\sqrt{5}-5$



五、三角形的特殊线段

1. 三角形的中线

三角形中，连结一个顶点和它对边中点的线段．

表示法：1. AD 是△ABC 的 BC 上的中线．2. BD=DC=$\frac{1}{2}$BC

【评注】①三角形的中线是线段；②三角形三条中线全在三角形的内部；

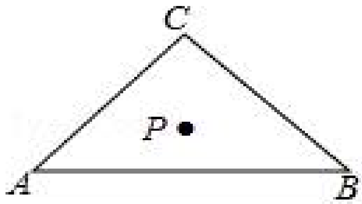
③三角形三条中线交于三角形内部一点；这个点叫做三角形的重心．

重心将中线分成 2:1 的两段．

④中线把三角形分成两个面积相等的三角形．

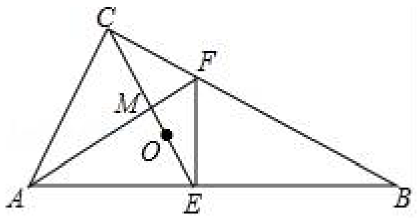
⑤直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半．

【例 13】如图，已知在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=BC，AB=6，点 P 是 Rt△ABC 的重心，则点 P 到 AB 所在直线的距离等于(　　)．



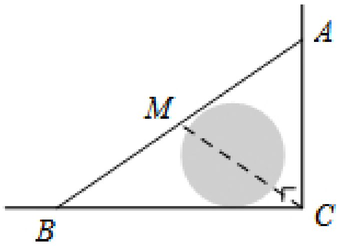
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 3/2　　D. 2　　E. 3

【例 14】如图，直角△ABC 中，∠B=30°，点 O 是△ABC 的重心，连接 CO 并延长交 AB 于点 E，过点 E 作 EF⊥AB 交 BC 于点 F，连接 AF 交 CE 于点 M，则 $\frac{MO}{MF}$ 的值为(　　)．



A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　E. $\frac{1}{3}$

【例 15】如图，公路 AC、BC 互相垂直，公路 AB 的中点 M 与点 C 被湖隔开．若测得 BM 的长为 1.2，则点 M 与点 C 之间的距离为(　　).



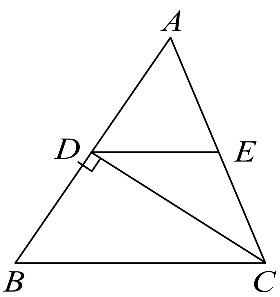
A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.9　　D. 1.2　　E. 1.4

【例 16】已知直角三角形三边的平方和是 32，则其斜边上的中线长为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

【例 17】如图，△ABC 中，CD⊥AB 于 D，E 是 AC 的中点．若 AD＝6，DE＝5，则 CD 的长等于(　　).

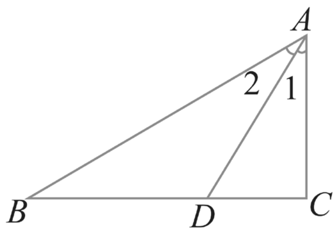
A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10　　E. 12



2. 三角形的角平分线

三角形一个内角的平分线与它的对边相交，这个角顶点与交点之间的线段

如 AD 是△ABC 的∠BAC 的平分线，则∠1=∠2=$\frac{1}{2}$∠BAC.



【评注】①三角形的角平分线是线段；

②三角形三条角平分线全在三角形的内部；

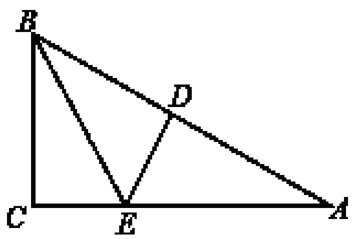
③三角形三条角平分线交于三角形内部一点；这个点叫做三角形的内心.内心到三边的距离相等.

【例 18】在△ABC 中，∠C=90°，BC=16，∠BAC 的平分线交 BC 于点 D，且 BD∶DC=5∶3，则 D 到 AB 的距离为(　　).

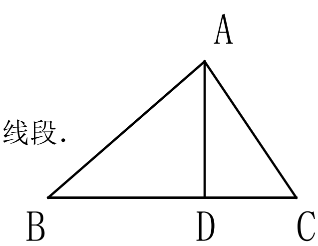
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6

【例 19】如图，△ABC 中，∠ACB=90°，BE 平分∠ABC，DE⊥AB，垂足为 D，如果 AC=3，那么 AE+DE 的值为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 6



3. 三角形的高



从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段.

如 AD 是△ABC 的 BC 上的高线，则 AD⊥BC 于 D 和∠ADB=∠ADC=90°.

【评注】①三角形的高是线段；

②锐角三角形三条高全在三角形的内部，直角三角形有两条高是边，钝角三角形有两条高在形外；

③三角形三条高所在直线交于一点．这个点叫做三角形的垂心．

4. 线段垂直平分线的性质．

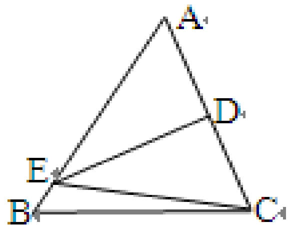
经过某一条线段的中点，并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线，又称“中垂线”．垂直平分线可以看成到线段两个端点距离相等的点的集合，垂直平分线是线段的一条对称轴．

【评注】①垂直平分线垂直且平分其所在线段．

②垂直平分线上任意一点，到线段两端点的距离相等．

③三角形三条边的垂直平分线相交于一点，该点叫外心，并且这一点到三个顶点的距离相等．

【例 20】如图，DE 是△ABC 中 AC 边的垂直平分线，若 BC=8，AB=10，则△EBC 的周长为(　　)．



A. 16　　　B. 28　　　C. 26　　　D. 18　　　E. 24

5. 三角形的中位线

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线．

(1)三角形共有三条中位线，并且它们又重新构成一个新的三角形．

(2)要会区别三角形中线与中位线．

三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半．

(3)三角形中位线定理的作用：

位置关系：可以证明两条直线平行．

数量关系：可以证明线段的倍分关系．

【评注】任一个三角形都有三条中位线，由此有：

①三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半．

②三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形．

③三条中位线将原三角形划分出三个面积相等的平行四边形．

④三角形一条中线和与它相交的中位线互相平分．

⑤三角形中任意两条中位线的夹角与这夹角所对的三角形的顶角相等．

【例 21】在△ABC 中，已知 BD 和 CE 分别是边 AC、AB 上的中线，且 BD⊥CE，垂足为 O．若 OD=2， OE=4，则线段 AO 的长度为(　).

A. $2\sqrt{5}$　　B. $4\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$　　E. $5\sqrt{3}$

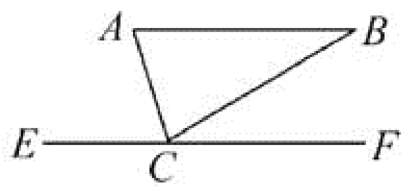
六、三角形面积公式

1. 利用底高求面积

$$S=\frac{1}{2}ah$$

其中 h 是 a 边上的高.

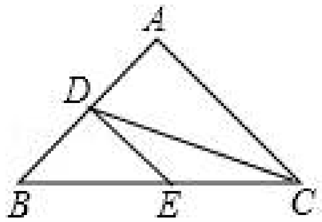
【例 22】如图,AB∥EF,C 是 EF 上一个动点,当点 C 的位置变化时,△ABC 的面积将(　).



A. 变大　　B. 变小　　C. 不变

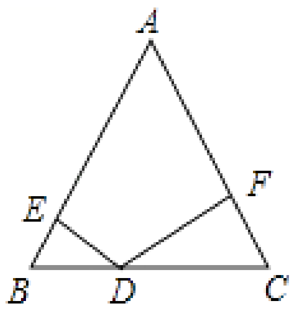
D. 变大变小要看点 C 向左还是向右移动　　E. 先增大再减小

【例 23】如图，△ABC 中，D，E 两点分别在 AB，BC 上，若 AD：DB=CE：EB=2：3，则△DBE 与△ADC 的面积比为(　).



A. 3：5　　B. 4：5　　C. 9：10　　D. 15：16　　E. 4:9

【例 24】如图，等腰△ABC 中，AB=AC=13，BC=10，D 是 BC 边上任意一点，DE⊥AB 于 E，DF⊥AC 于点 F，则 DE+DF=(　).



A. $\frac{120}{13}$　B. $\frac{110}{13}$　C. $\frac{111}{13}$　D. $\frac{100}{13}$　E. $\frac{90}{13}$

2. 利用夹角求面积

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

C 是 a， b 边所夹的角.

C	30° 或 150°	45° 或 135°	60° 或 120°	90°
sinC	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

【例 25】若三角形有两边长为 4 与 6，三角形的面积为 $6\sqrt{2}$，则这两边的夹角为(　).

A. 30°　B. 45° 或 135°　C. 60° 或 120°　D. 75°　E. 90°

3. 利用边长求面积

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p 为三角形的半周长.

【例 26】若三角形的三边长分别为 5, 6, 7，则三角形的面积为(　).

A. $4\sqrt{6}$　B. $6\sqrt{6}$　C. $8\sqrt{6}$　D. $9\sqrt{3}$　E. $12\sqrt{2}$

七、三角形的全等

1. 全等三角形的概念

能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.用数学语言表达就是两个三角形等价，这样的两个三角形具有相同的边长、角、面积等.

两个三角形全等时，互相重合的顶点叫做对应顶点，互相重合的边叫做对应边，互相重合的角叫做对应角.夹边就是三角形中相邻两角的公共边，夹角就是三角形中有公共端点的两边所成的角.

2. 三角形全等的判定

(1)边角边定理

有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等(可简写成“边角边”或“SAS”)

(2)角边角定理

有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等(可简写成“角边角”或“ASA”)

(3)边边边定理

有三边对应相等的两个三角形全等(可简写成“边边边”或“SSS”).

3. 直角三角形全等的判定

对于特殊的直角三角形，判定它们全等时，还有 HL 定理(斜边、直角边定理)：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(可简写成“斜边、直角边”或“HL”)

4. 全等变换

只改变图形的位置，不改变其形状大小的图形变换叫做全等变换.

全等变换包括以下三种：

(1)平移变换：把图形沿某条直线平行移动的变换叫做平移变换.

(2)对称变换：将图形沿某直线翻折 180°，这种变换叫做对称变换.

(3)旋转变换：将图形绕某点旋转一定的角度到另一个位置，这种变换叫做旋转变换.

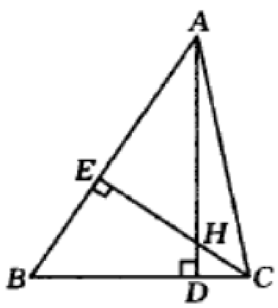
5. 全等三角形的表示和性质

全等用符号“≌”表示，读作“全等于”. 如△ABC≌△DEF，读作“三角形 ABC 全等于三角形 DEF”.

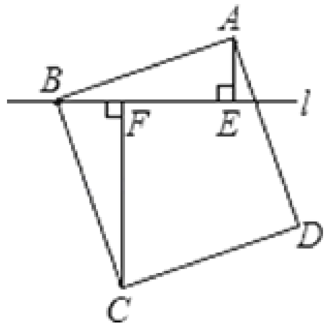
【评注】记两个全等三角形时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

【例 27】如图，在 ΔABC 中，$AD\perp BC$ 于 D，$CE\perp AB$ 于 E，AD 与 CE 交于点 H，若 EH=EB=3，AE=4，那么 CH=(　　).

A. 1　　　　B. $\dfrac{4}{3}$　　　　C. $\dfrac{5}{3}$　　　　D. $\sqrt{3}$　　　　E. 2



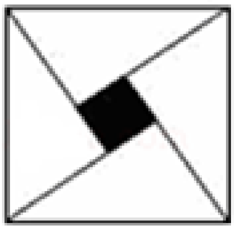
【例 28】如图，过正方形 ABCD 的顶点 B 作直线 l，过 A、C 作直线 L 的垂线，垂足分别为 E、F，若 AE=1，CF=2，则 AB 的长为(　　).



A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 3　　D. $\sqrt{5}$　　E. 3.5

【例 29】如图，正方形是由四个直角边分别为 3 和 4 全等的直角三角形拼成的，那么阴影部分面积为(　　).

A. 1　　B. 1.5　　C. 2　　D. 2.5　　E. 3

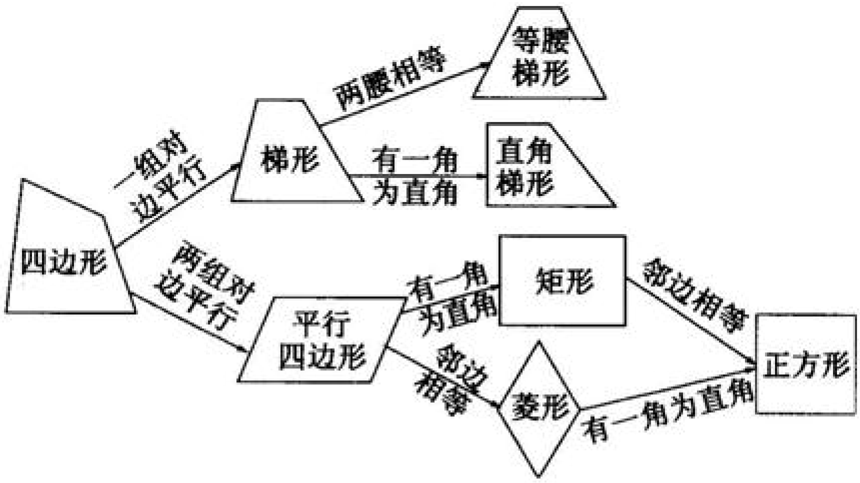


第二节 四边形

一、四边形

1. 定义

在同一平面内，由不在同一直线上的四条线段首尾顺次相接的图形叫做四边形. 四边形分类如图所示：



2. 对角线

在四边形中，连接不相邻两个顶点的线段叫做四边形的对角线.

3. 四边形的不稳定性

三角形的三边如果确定后，它的形状、大小就确定了，这是三角形的稳定性. 但是四边形的四边确定后，它的形状不能确定，这就是四边形所具有的不稳定性，它在生产、生活方面有着广泛的应用.

4. 四边形的内角和定理及外角和定理

四边形的内角和定理：四边形的内角和等于 360°.

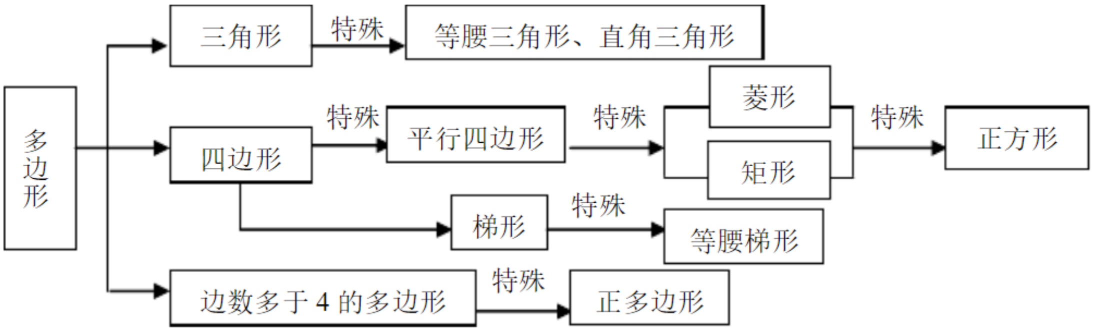
四边形的外角和定理：四边形的外角和等于 360°.

推论：多边形的内角和定理：n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$；

多边形的外角和定理：任意多边形的外角和等于 360°.

5. 多边形的对角线条数的计算公式

设多边形的边数为 n，则多边形的对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$. 多边形的分类如图所示：



【例 1】一个多边形从一个顶点共引出三条对角线，此多边形一定是(　　).

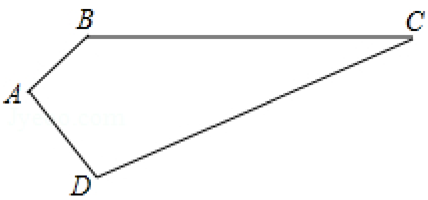
A. 四边形　　B. 五边形　　C. 六边形　　D. 三角形　　E. 五边形或六边形

【例 2】如果一个多边形的每一个内角都相等，且每一个内角的度数为 135°，那么这个多边形的边数为(　　).

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9　　E. 10

【例 3】如图，已知四边形 ABCD 中，$\angle A=90^0$，若 AB=3，DA=4，BC=12，CD=13，求四边形 ABCD 的面积. (　　).

A. 22　　B. 32　　C. 34　　D. 35　　E. 36



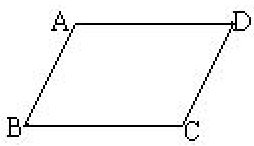
二、平行四边形

1. 平行四边形的概念

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

平行四边形用符号“▱ABCD”表示，如平行四边形 ABCD 记作“▱ABCD”，读作“平行四边形 ABCD”.

2. 平行四边形的性质



(1) 平行四边形的邻角互补，对角相等.

(2) 平行四边形的对边平行且相等.

(3)平行四边形的对角线互相平分

推论：夹在两条平行线间的平行线段相等.

(4)若一直线过平行四边形两对角线的交点，则这条直线被一组对边截下的线段以对角线的交点为中点，并且这两条直线二等分此平行四边形的面积.

3. 平行四边形的判定

(1)定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形

(2)定理 1：两组对角分别相等的四边形是平行四边形

(3)定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形

(4)定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形

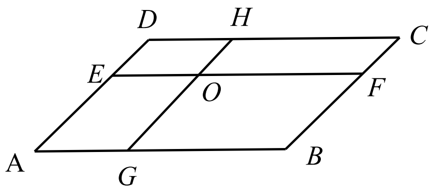
(5)定理 4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形

4. 平行四边形的面积

$S_{平行四边形}$=底边长×高=$a \cdot h$

【例 4】如图平行四边形 ABCD 中，$EF // AB$，$GH // AD$，EF 与 GH 交于 O，则该图形中的平行四边形的个数共有(　　).

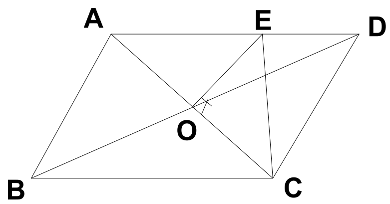
A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10　　E. 11



【例 5】在平行四边形 ABCD 中，两条对角线 AC、BD 相交于点 O，与△ABO 面积相等的三角形有(　　)个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

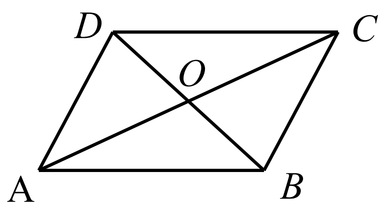
【例 6】如图，▱ABCD 的周长为 16，AC、BD 相交于点 O，OE⊥AC 交 AD 于 E，则△DCE 的周长为(　　)



A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10　　E. 12

【例 7】如图，已知 O 是平行四边形 ABCD 对角线的交点，AC=38，BD=24，AD=14，那么ΔOBC 的周长为(　　).

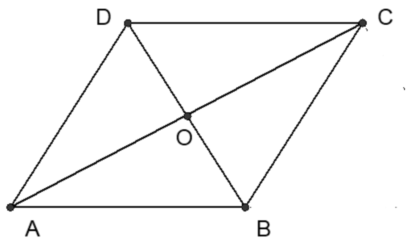
A. 28　　B. 30　　C. 32　　D. 35　　E. 45



【例 8】如图，在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O，如果 AC=12，BD=10，AB=m，那么 m 的取值范围是(　　).

A. $1<m<11$　　B. $2<m<22$　　C. $10<m<12$

D. $5<m<6$　　E. $5<m<12$



三、矩形

1. 概念

有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

2. 矩形的性质

(1)具有平行四边形的一切性质

(2)矩形的四个角都是直角

(3)矩形的对角线相等

(4)矩形是轴对称图形

3. 矩形的判定

(1)定义：有一个角是直角的平行四边形是矩形

(2)定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形

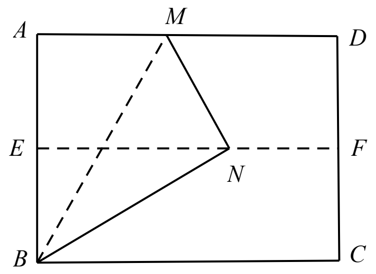
(3)定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形

4. 矩形的面积

$S_{矩形}$=长×宽=ab

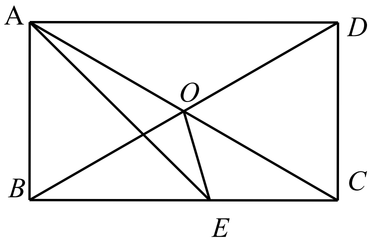
【例 9】如图，先将矩形纸片 ABCD 对折一次折痕为 EF，展开后又将纸片折叠使点 A 落在 EF 上，此时折痕为 BM，求∠NBC 度数的大小(　　).

A. 20°　　　B. 25°　　　C. 30°　　　D. 35°　　　E. 45°



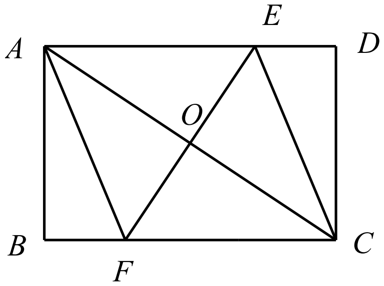
【例 10】如图,O 是矩形 ABCD 对角线的交点,AE 平分∠BAD,∠AOD=120°，求∠AEO 的度数(　　).

A. 20°　　　B. 25°　　　C. 30°　　　D. 35°　　　E. 45°



【例 11】在矩形 ABCD，AB=6,BC=8,将矩形折叠，使点 C 与点 A 重合，折痕为 EF，在展开，求折痕 EF 的长(　　).

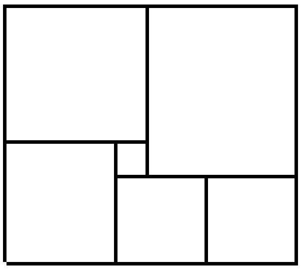
A. 1　　　B. 12　　　C. 6.5　　　D. 7　　　E. 7.5



【例 12】图中的矩形是由六个正方形组成，其中最小的正方形的面积为 1，求这个矩形的周长

为多少？(　　).

A. 24　　B. 36　　C. 40　　D. 42　　E. 48



四、菱形

1. 概念

有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形

2. 菱形的性质

(1)具有平行四边形的一切性质

(2)菱形的四条边相等

(3)菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角

(4)菱形是轴对称图形

3. 菱形的判定

(1)定义：有一组邻边相等的平行四边形是菱形

(2)定理 1：四边都相等的四边形是菱形

(3)定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形

4. 菱形的面积

$S_{菱形}$=底边长×高=两条对角线乘积的一半

【例 13】菱形 ABCD 中，∠DAB=120°，如果它的一条对角线长为 12，求菱形 ABCD 的边长(　　).

A. 6 或 $4\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 12　　D. 12 或 $4\sqrt{3}$　　E. 16 或 $4\sqrt{3}$

五、正方形

1. 概念

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

2. 正方形的性质

(1)具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质

(2)正方形的四个角都是直角，四条边都相等

(3)正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角

(4)正方形是轴对称图形，有 4 条对称轴

(5)正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，两条对角线把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形

(6)正方形的一条对角线上的一点到另一条对角线的两端点的距离相等.

3. 正方形的判定

(1)判定一个四边形是正方形的主要依据是定义，途径有两种：

先证它是矩形，再证有一组邻边相等.

先证它是菱形，再证有一个角是直角.

(2)判定一个四边形为正方形的一般顺序如下：

先证明它是平行四边形；再证明它是菱形(或矩形)；最后证明它是矩形(或菱形)

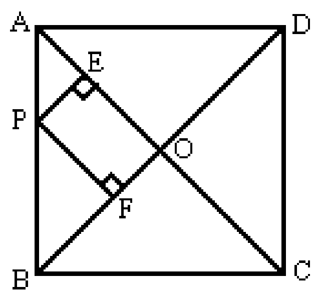
4. 正方形的面积

设正方形边长为 a，对角线长为 b

$$S_{正方形}=a^2=\frac{b^2}{2}$$

【例 14】正方形 ABCD 中，对角线 BD 长为 16，P 是 AB 上任意一点，则点 P 到 AC、BD 的距离之和等于(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8　　E. 9



六、梯形

1、梯形的相关概念

一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做梯形.

梯形中平行的两边叫做梯形的底，通常把较短的底叫做上底，较长的底叫做下底.

梯形中不平行的两边叫做梯形的腰.

梯形的两底的距离叫做梯形的高.

两腰相等的梯形叫做等腰梯形.

一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形.

一般地，梯形的分类如下：

- 一般梯形
- 特殊梯形
  - 直角梯形
  - 等腰梯形

2. 梯形的判定

(1) 定义：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形是梯形.

(2) 一组对边平行且不相等的四边形是梯形.

3. 等腰梯形的性质

(1) 等腰梯形的两腰相等，两底平行.

(3) 等腰梯形的对角线相等.

(4) 等腰梯形是轴对称图形，它只有一条对称轴，即两底的垂直平分线.

4. 等腰梯形的判定

(1) 定义：两腰相等的梯形是等腰梯形

(2) 定理：在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形

(3) 对角线相等的梯形是等腰梯形.

5. 梯形的面积

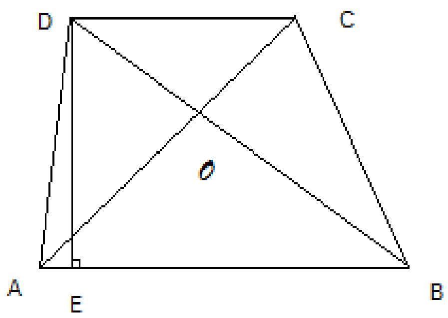
(1) 如图，$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(CD+AB)\cdot DE$

(2) 梯形中有关图形的面积：

① $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BAC}$；

② $S_{\Delta AOD}=S_{\Delta BOC}$；

③ $S_{\Delta ADC}=S_{\Delta BCD}$



6. 梯形中位线定理

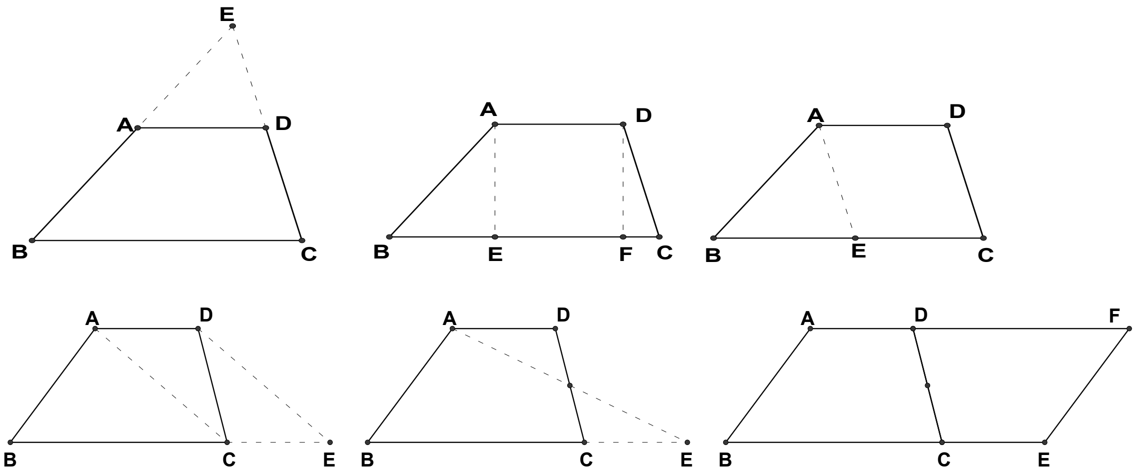
梯形中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

7. 梯形的辅助线

对角线是研究四边形的常用辅助线，它既可以把四边形转化为三角形，又可以充分体现四边形的所有特征. 梯形中常添加辅助线，将其转化为平行四边形或者三角形：

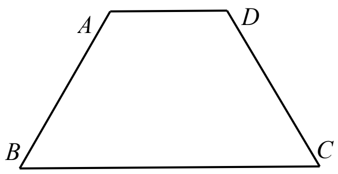
(1) 过较短底的顶点作梯形的高；(2) 过一个顶点作腰的平行线；(3) 过一个顶点作一条对角线的平行线；(4) 延长两腰相交；(5) 连结上底的一个顶点与另一腰的中点，并延长与下底的延长线相交.

梯形常用的辅助线如下图：



【例 15】已知等腰梯形 ABCD 中，AB=CD，∠B=60°，AD=15，BC=49，求它的腰长(　　).

A. 32　　B. 34　　C. 36　　D. 38　　E. 40



【例 16】在梯形 ABCD 中，AD∥BC，AD=2，BC=8，AC=6，BD=8，则此梯形的面积是(　　).

A. 24　　B. 20　　C. 16　　D. 12　　E. 10

第三节 圆与扇形

一、角的弧度

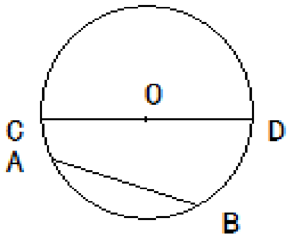
把圆弧长度和半径的比值称为对一个圆周角的弧度.

度与弧度的换算关系：$1\text{弧度}=\dfrac{180^\circ}{\pi}$ $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度

几个常用的角

$360^\circ=2\pi$ $180^\circ=\pi$ $90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$ $60^\circ=\dfrac{\pi}{3}$ $45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$ $30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$

二、弦、弧等与圆有关的定义



1. 弦

连接圆上任意两点的线段叫做弦.（如图中的 AB）

2. 直径

经过圆心的弦叫做直径.（如图中的 CD）

直径等于半径的 2 倍.

3. 半圆

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做半圆.

4. 弧、优弧、劣弧

圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧.

弧用符号“⌒”表示，以 A，B 为端点的弧记作“$\overset{\frown}{AB}$”，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”.

大于半圆的弧叫做优弧（多用三个字母表示）；小于半圆的弧叫做劣弧（多用两个字母表示）

三、垂径定理及其推论

垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

推论 1：(1)平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

(2)弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

(3)平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

四、弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

1. 圆心角

顶点在圆心的角叫做圆心角.

2. 弦心距

从圆心到弦的距离叫做弦心距.

3. 弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

推论：在同圆或等圆中，如果两个圆的圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

五、圆周角定理及其推论

1. 圆周角

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角.

2. 圆周角定理

一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

推论 2：半圆(或直径)所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

推论 3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

六、过三点的圆

1. 过三点的圆

不在同一直线上的三个点确定一个圆.

2. 三角形的外接圆

经过三角形的三个顶点的圆叫做三角形的外接圆.

3. 三角形的外心

三角形的外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点，它叫做这个三角形的外心.

4. 圆内接四边形性质(四点共圆的判定条件)

圆内接四边形对角互补.

七、圆的周长及面积

圆的圆心为O，半径为r，直径为d，则

周长为$C=2\pi r=\pi d$

面积是$S=\pi r^2=\dfrac{1}{4}\pi d^2$

八、扇形的弧长及面积

1. 扇形弧长

$l = r\theta = \dfrac{\alpha^\circ}{360} \times 2\pi r$，其中 θ 为扇形角的弧度数，α 为扇形角的角度，r 为扇形半径

2. 扇形面积

$S = \dfrac{\alpha^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \dfrac{1}{2} lr$，$\alpha$ 为扇形角的角度，r 为扇形半径.

3. 弓形面积

弓形一般不要求周长，主要求面积.

一般来说，弓形面积＝扇形面积-三角形面积.（除了半圆）

4. “弯角”面积

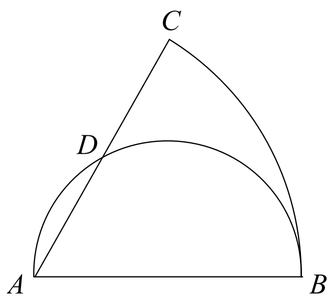
如图：弯角的面积＝正方形-扇形

5. “谷子”面积

如图：“谷子”的面积＝弓形面积×2

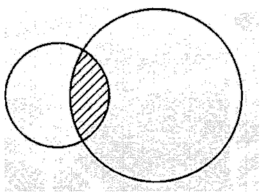
【例 1】如图，已知扇形 BAC 的面积是半圆 ADB 面积的 $\dfrac{4}{3}$ 倍，则角 CAB 的度数是(　　).

A. 30　　　B. 40　　　C. 45　　　D. 50　　　E. 60



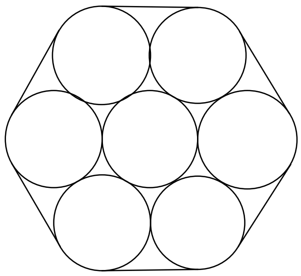
【例 2】如图，大小两圆的相交部分(即阴影区域)的面积是大圆面积的 $\dfrac{4}{15}$，是小圆面积的 $\dfrac{3}{5}$. 如果量得小圆的半径是 5，那么大圆半径是(　　).

A. 7.5　　　B. 7　　　C. 6.5　　　D. 6　　　E. 5.5



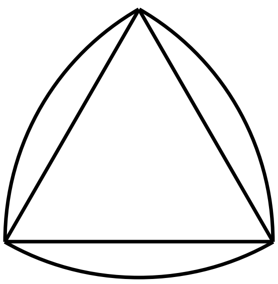
【例 3】有七根直径 5 的塑料管，用一根橡皮筋把它们勒紧成一捆(如图)，此时橡皮筋的长度是多少厘米？(π 取 3)(　　).

A. 42　　B. 45　　C. 48　　D. 51　　E. 55



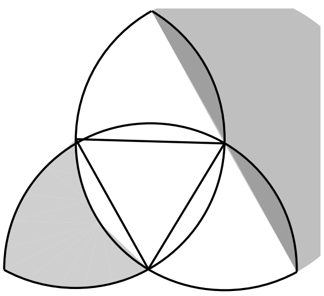
【例 4】三个半径为 100 且圆心角为 60^{o} 的扇形如图摆放；那么，这个封闭图形的周长是(　　).(π 取 3.14)

A. 628　　B. 620　　C. 512　　D. 426　　E. 314



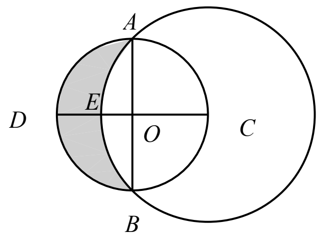
【例 5】分别以一个边长为 2 的等边三角形的三个顶点为圆心，以 2 为半径画弧，得到下图；那么，阴影图形的周长是(　　). (π 取 3.14)

A. 12.56　　B. 9.42　　C. 6.28　　D. 4.42　　E. 3.14



【例 6】如图，圆 O 的直径 AB 与 CD 互相垂直，AB=10，以 C 为圆心，CA 为半径画弧.求月牙形 ADBEA(阴影部分)的面积.(　　).

A.25　　B.24　　C.22　　D.20　　E.18



第七章 解析几何

第一节 平面直角坐标系

一、两点中点坐标

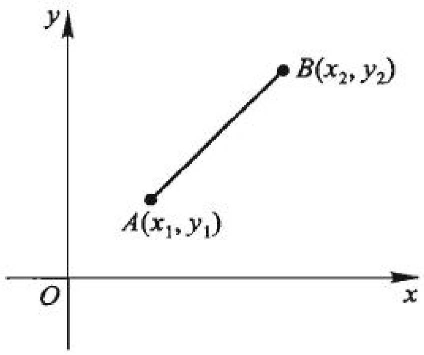
两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

【例 1】已知点 A 的坐标为 $(m,4)$，点 B 的坐标为 $(3,n)$，C$(1,3)$ 为线段 AB 上的中点，则（　）.

A. $m=1,n=2$　　B. $m=-1,n=-2$　　C. $m=-1,n=2$

D. $m=0,n=2$　　E. $m=-1,n=1$

二、两点距离公式



两点 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$ 之间的距离：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

【例 2】线段 AB 的长为 10，点 A 的坐标是(-4,m)，点 B 的坐标为(m,-3m)，其中 m 为整数，则点 B 到原点的距离为（　）.

A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{7}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{10}$　　E. 4

第二节 平面直线

一、直线的倾斜角和斜率

1. 倾斜角

如图 1，直线与 x 轴正方向所成的夹角，称为倾斜角，记为 α . 其中要求 $\alpha\in[0,\pi)$.

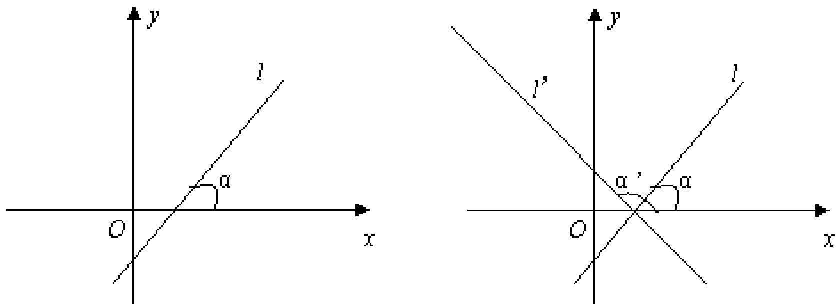


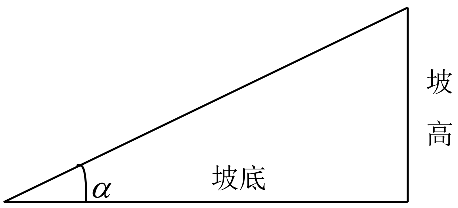
图 1　　图 2

图 2 中直线 l 的倾斜角 α 为锐角，直线 l' 的倾斜角 α' 为钝角. 当直线与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 0°.

倾斜角的意义：平面内每一条直线都有一个确定的倾斜角，且倾斜程度相同的直线，其倾斜角相等；倾斜程度不同的直线，其倾斜角不等. 因此，直线的倾斜角表示平面内一条直线的倾斜程度.

2. 斜率

由于直线的倾斜角并不是越大，直线越陡峭(越接近竖直)，故结合坡度的概念来分析直线的陡缓程度，如图，坡度 i=$\dfrac{\text{坡高}}{\text{坡底}}$



从而得到**斜率的定义**：

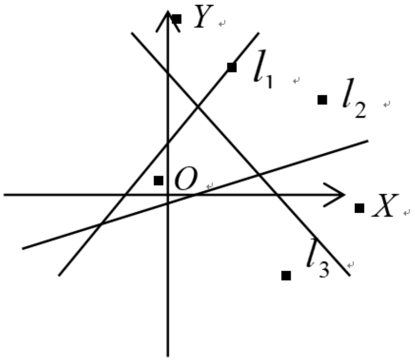
一条直线的倾斜角 α 的正切值叫这条直线的斜率，斜率常用小写字母 k 表示，即

$$k=\tan\alpha,\quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$$

当 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时，$k\in[0,+\infty)$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线的斜率不存在；

当 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$k\in(-\infty,0)$，直线的斜率反映了直线对 x 轴的倾斜程度.

【注意】倾斜角是 90° 的直线没有斜率. 并不是倾斜角越大，斜率越大. 如图中三条直线，$k_1>k_2>0>k_3$，但 $\alpha_2<\alpha_1<90^0<\alpha_3$. 可以看出，斜率 k 的绝对值越大，直线越陡.



3. 两点斜率公式

设直线 l 上有两个点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，　$(x_1\neq x_2)$；

【例 1】过两点 M(-4，1)、N(0，-1)的直线的斜率为(　　).

A. -2　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $-\frac{1}{2}$　　E. $\frac{1}{2}$

【例 2】已知三点 A(a，2)、B(3，7)、C(-2，-9a)在一条直线上，求实数 a 的值.（　　）.

A. $a=-2$或$a=\frac{2}{9}$　　B. $a=2$或$a=-\frac{2}{9}$　　C. $a=2$或$a=\frac{2}{9}$

D. $a=-2$或$a=-\frac{2}{9}$　　E. $a=2$或$a=\frac{1}{9}$

二、直线方程

1. 斜截式

斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b[（即过点 P₀（0，b)]的直线方程为 $y=kx+b$.

【例 3】已知 A（-1，2），B（2，4），直线 AB 在 y 轴的截距为(　　).

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{8}{3}$　D. $\frac{1}{2}$　E. 1

2. 点斜式

过点 $P\left(x_0,y_0\right)$，斜率为 k 的直线方程为 $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$.

【例 4】过点(-2,3)，斜率为 3 的直线在 y 轴上的截距为(　).

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4　E. 9

3. 截距式

在 x 轴上的截距为 a(即过点$P_1(a,0)$)，在 y 轴上的截距为 b(即过点$P_0(0,b)$)的直线方程为

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,　$(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

【例 5】过点(5,8)且截距互为相反数的直线有几条(　).

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4　E. 无数条

4. 两点式

过两个点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线方程为 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$,　$(x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2)$.

【例 6】过(1,-3)和(3,1)两个点的直线在 y 轴上的截距为(　).

A. 5　B. -2　C. -3　D. -4　E. -5

5. 一般式

$ax+by+c=0$ (a,b 不全为零).

【注意】斜率 $k=-\frac{a}{b}$，在 x 轴截距为 $-\frac{c}{a}$，在 y 轴截距为 $-\frac{c}{b}$

【例 7】直线 2x-3y+12=0 在两个坐标轴的截距之和为(　).

A. -4　B. -2　C. 2　D. -12　E. 12

三、两条直线的位置关系(相交、平行、垂直)

	斜截式 l_1： $y=k_1x+b_1$； l_2： $y=k_2x+b_2$	一般式 l_1： $a_1x+b_1y+c_1=0$； l_2： $a_2x+b_2y+c_2=0$
平行	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$， $b_1\neq b_2$	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
垂直	$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$	$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

【例 8】已知直线$l_1:(k-3)x+(4-k)y+1=0$，与直线$l_2:2(k-3)x-2y+3=0$平行，则k的值是（　　）.

A. 3　　B. 5　　C. 1　　D. -1　　E. 3 或 5

【例 9】若直线$\mathrm{mx}+3\mathrm{y}+5=0$与直线$\mathrm{nx}-2\mathrm{y}+1=0$互相垂直，那么符合条件的正整数解有()组？（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

【例 10】已知三条直线$2x+3y+5=0, 4x-3y+1=0, mx-y=0$不能构成三角形. 求实数$m$的值有几种情况？（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

四、点到直线的距离

l： $ax+by+c=0$，点(x_0,y_0)到l的距离为$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【例 11】已知点 C(2,-3),M(5,5),N(-3,-1),则点 C 到直线 MN 的距离等于(　　).

A. $\dfrac{23}{5}$　　B. $\dfrac{22}{5}$　　C. $\dfrac{21}{5}$　　D. $\dfrac{19}{5}$　　E. $\dfrac{18}{5}$

五、两平行直线之间的距离

l_1： $ax+by+c_1=0$； l_2： $ax+by+c_2=0$，那么l_1与l_2之间的距离为： $d=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【例 12】已知|3x-4y|=5 是圆的两条切线，求圆的面积为(　　).

A. $\dfrac{1}{2}\pi$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π　　E. 6π

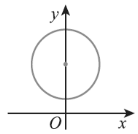
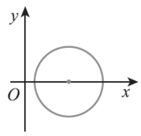
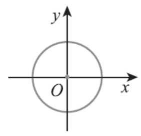
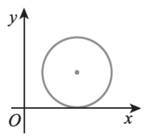
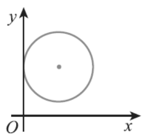
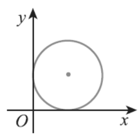
第三节 圆

在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫做圆(第一定义)；平面内到定点的距离等于定长的点的集合(第二定义).

一、圆的方程

1. 标准式

圆心为 (x_0, y_0)，半径为 r 的圆可表示为：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

特殊的圆	方程	图像	特征
$x_0=0$	$x^2+(y-y_0)^2=r^2$		圆心在 y 轴
$y_0=0$	$(x-x_0)^2+y^2=r^2$		圆心在 x 轴
$x_0=y_0=0$	$x^2+y^2=r^2$		圆心在原点上
$\lvert y_0 \rvert=r$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$		与 x 轴相切
$\lvert x_0 \rvert=r$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$		与 y 轴相切
$\lvert x_0 \rvert=\lvert y_0 \rvert=r$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$		与两轴相切

2. 一般式

$x^2+y^2+ax+by+c=0$；

可将其配方变成标准式：$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}$.

【注意】一般式成立的条件 $a^2+b^2-4c>0$.

【例 1】以 P(-2,3)为圆心，且与 y 轴相切的圆，必经过下列哪个坐标（　）.

A. (-1,1)　　B. (-1,3-$\sqrt{3}$)　　C. (1,-3+$\sqrt{3}$)

D. (-1，-3)　　E. (-3,1+$\sqrt{3}$)

【例 2】圆心在 y 轴上，半径为 1，且过点(1，2)的圆的方程为（　）.

A. $x^2+(y-2)^2=1$　　B. $x^2+(y+2)^2=1$

C. $(x-1)^2+(y-3)^2=1$　　D. $x^2+(y-3)^2=1$

E. 以上均不正确

【例 3】点 P(4，－2)与圆 $x^2+y^2=4$ 上任一点连线的中点轨迹方程是（　）.

A. $(x-2)^2+(y+1)^2=1$　　B. $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

C. $(x+4)^2+(y-2)^2=4$　　D. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

E. 以上均不正确

二、直线与圆的关系

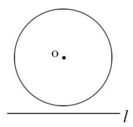
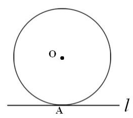
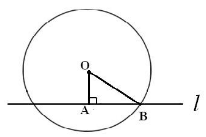
直线和圆有三种位置关系，具体如下：

(1)相交：直线和圆有两个公共点时，叫做直线和圆相交，这时直线叫做圆的割线，公共点叫做交点；

(2)相切：直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切，这时直线叫做圆的切线；

(3)相离：直线和圆没有公共点时，叫做直线和圆相离.

直线l，$y=kx+b$；圆 O，$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，d 为圆心(x_0,y_0)到直线 l 的距离

直线与圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）
直线与圆**相离**		$d>r$
直线与圆**相切**		$d=r$
直线与圆**相交**		$d<r$

【例 4】已知圆 C 与直线 $x-y=0$ 及 $x-y-4=0$ 都相切，圆心在直线 $x+y=0$ 上，则圆 C 的方程为(　　).

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$　　B. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　　D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

E. 以上均不正确

【例 5】直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的位置关系为(　　).

A. 相切　　B. 相交但直线不过圆心　　C. 直线过圆心

D. 相离　　E. 相切或相离

【例 6】已知圆 C 的圆心是直线 x-y+1=0 与 x 轴的交点，且圆 C 与直线 x+y+3=0 相切，则圆 C 的方程为(　　).

A. $(x-1)^2+y^2=2$　　B. $(x+1)^2+y^2=2$

C. $(x+1)^2+y^2=4$　　D. $x^2+(y+1)^2=2$

E. $x^2+(y-1)^2=4$

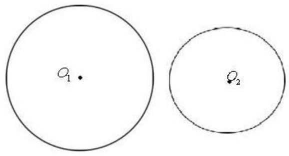
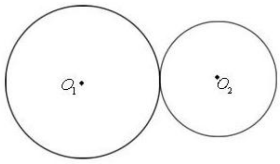
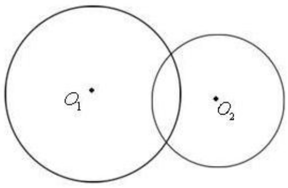
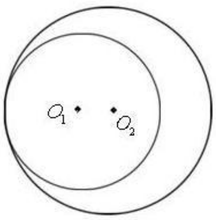
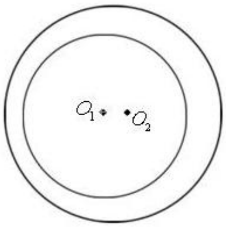
【例 7】已知圆 O: $x^2+y^2=5$ 和点 $A(1, 2)$，则过 A 且与圆 O 相切的直线与两坐标轴围成的三角形的面积等于(　　).

A. $\frac{23}{4}$　　B. $\frac{25}{4}$　　C. $\frac{27}{4}$　　D. $\frac{25}{8}$　　E. $\frac{15}{4}$

三、圆与圆的关系

圆 O_1，$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$；圆 O_2，$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$（不妨设 $r_1>r_2$）；

d 为圆心 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 的圆心距.

两圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）	公共内切线条数	公共外切线条数
外离		$d>r_1+r_2$	2	2
外切		$d=r_1+r_2$	1	2
相交		$r_1-r_2<d<r_1+r_2$	0	2
内切		$d=r_1-r_2$	0	1
内含		$d<r_1-r_2$	0	0

【例 8】两圆的半径分别是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根且两圆的圆心距等于 3，则两圆的位位置关系是（　）.

A. 外离　　B. 外切　　C. 内切　　D. 相交　　E. 内含

【例 9】两圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和 $(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$ 相切，则（　）.

A. $(a-b)^2=r^2$　　B. $(a-b)^2=2r^2$

C. $(a+b)^2=r^2$　　D. $(a+b)^2=2r^2$

E. $(a-b)^2=3r^2$

第八章 立体几何

第一节 长方体

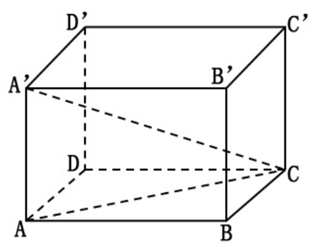
一、长方体

设 3 条相邻的棱边长是 a，b，c

1. 体积：$V=abc$

2. 全面积：$F=2(ab+bc+ac)$

3. 体对角线：$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



【例 1】长方体的 3 个侧面的面积分别为：12，6，8，求长方体的体积（　）.

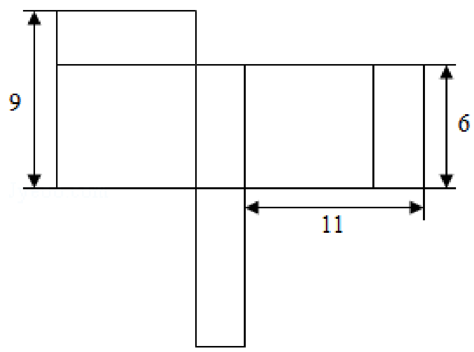
A. 18　　B. 20　　C. 24　　D. 25　　E. 28

【例 2】把一个长 3、宽 4、高 5 的长方体截成两个长方体，表面积最多增加（　）.

A. 24　　B. 30　　C. 40　　D. 45　　E. 50

【例 3】看图计算，如图是长方体纸箱的展开图，请你根据有关数据，求出纸箱的体积.（　）.

A. 116　　B. 114　　C. 122　　D. 124　　E. 144



【例 4】一个长方体，相邻两个面的面积之和为 35，棱长都是大于 1 的整数. 这个长方体的最大体积是多少？（　）.

A. 34　　B. 40　　C. 42　　D. 55　　E. 60

二、正方体

设棱边长是 a

1. 体积：$V=a^3$

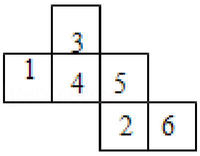
2. 全面积：$F=6a^2$

3. 体对角线：$d=\sqrt{3}a$

【例 5】已知某正方体的体对角线长为 3，那么这个正方体的全面积是（　　）.

A. 16　　　B. 18　　　C. 20　　　D. 22　　　E. 24

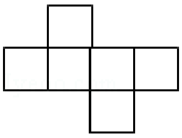
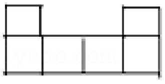
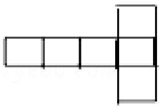
【例 6】如图：将如图纸片折起来可以做成一个正方体．这个正方体的 3 号面的对面是（　　）号



面.

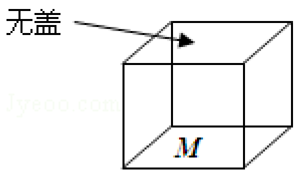
A. 2　　　B. 6　　　C. 4　　　D. 1　　　E. 5

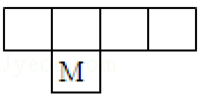
【例 7】下列图形都是由相同的小正方形组成，哪一个图形不能折成正方体？（　　）.

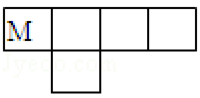
(1) 　(2) 　(3) 

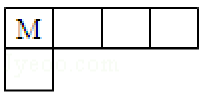
A. 1、2　　　B. 2　　　C. 2、3　　　D. 1、3　　　E. 3

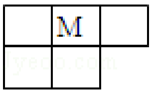
【例 8】如图，有一个无盖的正方体纸盒，下底标有字母“M”，将其剪开展成平面图形，想一想，这个平面图形是（　　）.



A. 

B. 

C. 

D. 

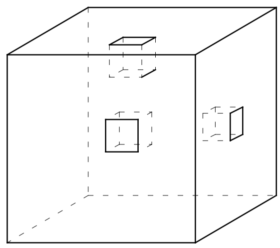
E. 以上都不正确

【例 9】一个长方体，如果宽增加 2，就变成一个正方体，这时表面积比原来增加 32. 原来长方体的体积是(　　).

A. 32　　B. 34　　C. 36　　D. 38　　E. 40

【例 10】如图是一个边长为 4 的正方体，分别在前后、左右、上下各面的中心位置挖去一个边长为 1 的正方体，做成一种玩具. 它的表面积是多少平方厘米?(图中只画出了前面、右面、上面挖去的正方体)(　　).

A. 110　　B. 114　　C. 116　　D. 120　　E. 128



第二节 柱体

一、柱体的分类

1. 圆柱

底面为圆的柱体称为圆柱.

2. 棱柱

底面为多边形的柱体称为棱柱，底面为 n 边形的就称为 n 棱柱.

二、柱体的通用公式

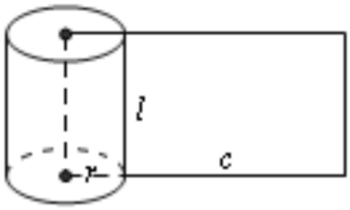
无论是圆柱还是棱柱，侧面展开图均为矩形，其中一边长为底面的周长，另一边为柱体的高.

侧面积：S=底面周长×高(展开矩形的面积).

体积：V=底面积×高.

三、对于圆柱的公式

设高为h，底面半径为r.



体积：$V=\pi r^2 h$.

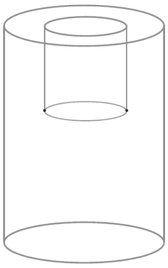
侧面积：$S=2\pi rh$（其侧面展开图为一个长为$2\pi r$，宽为h的长方形）.

全面积：$F=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rh+2\pi r^2$.

【注意】当圆柱的高等于直径时，轴截面为正方形，此时称为等边圆柱.

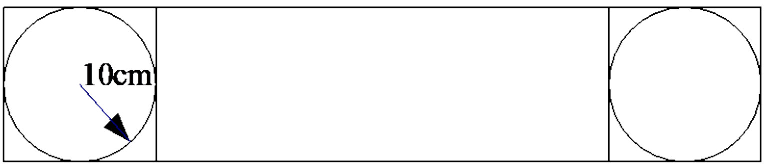
【例 1】有一个圆柱体的零件，高10，底面直径是6，零件的一端有一个圆柱形的圆孔，圆孔的直径是4，孔深5（见图）. 如果将这个零件接触空气的部分涂上防锈漆，那么一共要涂多少？（　）.

A. 98π　　B. 96π　　C. 92π　　D. 88π　　E. 86π



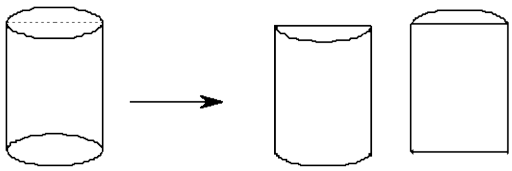
【例 2】如图，有一张长方形铁皮，剪下图中两个圆及一块长方形，正好可以做成 1 个圆柱体，这个圆柱体的底面半径为 10，那么原来长方形铁皮的面积是多少？（π＝3.14）

A. 1926　　B. 1956　　C. 2016　　D. 2036　　E. 2056



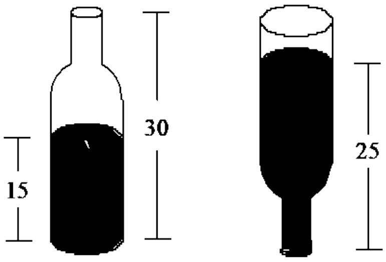
【例 3】已知圆柱体的高是10，由底面圆心垂直切开，把圆柱分成相等的两半，表面积增加了 40，求圆柱体的体积．（$\pi=3$）(　　).

A. 26　　B. 28　　C. 30　　D. 32　　E. 36



【例 4】一个酒瓶里面深 30，底面内直径是 10，瓶里酒深 15．把酒瓶塞紧后使其瓶口向下倒立这时酒深 25．酒瓶的容积是多少？(π 取 3)(　　).

A.1320　　B.1400　　C.1420　　D.1460　　E.1500



第三节 球体

一、基础知识与概念

1．球的截面：

一个平面截球，平面与球面的交线是一个圆，当平面经过球心时，这个圆叫做球的大圆，当平面不过球心时，这个圆叫做球的小圆.

2．球心和截面圆心的连线垂直于截面.

3．球心到截面的距离 d 与球半径 R 及截面圆半径 r 的关系：$R^2=d^2+r^2$.

4．球面距离：

球面上两点间的球面距离是指经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度.

5．几何体的外接球：几何体的顶点都在球面上；

几何体的内切球：球与几何体的各个面都相切.

二、公式

设球半径为 r

1. 体积：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

2. 表面积：$S=4\pi r^2$

【例 1】两个球的体积之比为 8∶27，那么这两个球的表面积之比为（　）.

A. 2∶3　　B. 4∶9　　C. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{8}:\sqrt{27}$　　E. 2:9

【例 2】一平面截一球得到直径是 6 的圆面，球心到这个平面的距离是 4，则该球的体积是（　）.

A. $\frac{100\pi}{3}$　　B. $\frac{208\pi}{3}$　　C. $\frac{500\pi}{3}$　　D. $\frac{416\sqrt{13}\pi}{3}$　　E. $\frac{315\pi}{2}$

第九章 排列组合

第一节 两个基本原理

一、分类计数原理(加法原理)

1. 定义

如果完成一件事有 n 类办法,只要选择其中一类办法中的任何一种方法,就可以完成这件事;若第一类办法中有 m_1 种不同的方法,第二类办法中有 m_2 种不同的方法……第 n 类办法中有 m_n 种不同的办法,那么完成这件事共有 N 种不同的方法.

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

2. 理解

(1)运用加法原理计数，关键在于合理分类，不重不漏.

(2)要求每一类中的每一种方法都可以独立完成此任务;

(3)两类不同办法中的具体方法，互不相同(即分类不重);

(4)完成此任务的任何一种方法，都属于某一类(即分类不漏).

【注意】合理分类也是运用加法原理解决问题的难点，不同的问题，分类的标准往往不同，需要积累一定的解题经验.

【例 1】甲同学计划五一去重庆游玩，从南京出发. 五一当天南京到重庆的火车有 3 班，轮船有 2 班，飞机有 5 班，请问甲同学一共有多少种不同的走法?(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 5　　D. 10　　E. 30

二、分步计数原理(乘法原理)

1. 定义

如果完成一件事,必须依次连续地完成 n 个步骤,这件事才能完成;若完成第一个步骤有 m_1 种不同的方法,完成第二个步骤有 m_2 种不同的方法……完成第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的方法.

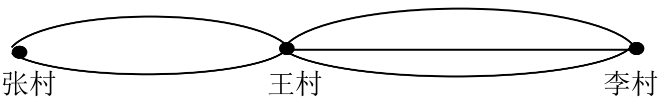
2. 理解

运用乘法原理计数，关键在于合理分步.

完成这件工作的 n 个步骤，各个步骤之间是相互联系的，任何一步的一种方法都不能完成此工作，必须连续完成这 n 步才能完成此工作;

各步计数相互独立；只要有一步中所采取的方法不同，则对应的完成此工作的方法也不同.

【例 2】从张村到王村有两条道路，从王村到李村有 3 条道路.从张村经王村到李村，共有多少种不同的走法？(　　).



A.3　　B.2　　C.5　　D.6　　E.30

第二节 两个思维公式

一、排序

1. 定义

从 n 个不同元素，按照不同顺序排成一列，共有 n!种不同的排法.

【例 1】用列举法求 ABC，不同的排序方法有几种？(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8　　E. 12

【例 2】用列举法求 ABBC 的排序有多少种？(　　).

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13　　E. 14

2. 公式

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

3. 常用数值

0！=1！=1，2！=2，3！=6，4！=24，5！=120

4. 应用

几个排序可以写几的阶乘.

二、组合

1. 定义

从 n 个不同元素中，任意取出 $m(m\le n)$ 个元素并为一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

【例 3】用列举法求从甲乙丙丁四个不同元素中，任取两个元素的组合有几个？(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8　　E. 12

【例 4】用列举法求从 AABBBC 这 6 个字母中，取 3 个字母的取法有多少种？(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

2. 组合数

从 n 个不同元素中，取出 $m(m\le n)$ 个元素的所有组合的个数，称为从 n 个不同元素中，取出 m 个不同元素的组合数，记作 C_n^m.

3. 组合数公式

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

【例 5】计算 $C_8^4-C_7^3$ 的数值为（　　）.

A. 25　　B. 28　　C. 30　　D. 32　　E. 35

第三节 解题准则及思维体系

排列组合是考生的共同短板，其根本原因在于：思维体系，简言之，形如电脑和手机，当系统出问题时，各种应用就会出错. 为了帮助考生从根本上解决排列组合，要先培养全新的思维体系，形如电脑或手机的操作系统升级和更新一样. 只要思维体系建立好了，各类题型学起来就很顺畅了.

一、根本大法(穷举、列举法)

很多考生看不起或者不重视列举法，认为列举法不就是数一数吗，其实则不然，列举法不仅是考试的重点，更是从本质上理解排列组合，及发现排列组合错误的根本方法.

【注意】列举的标准要选好，不要出现重复或者遗漏.

【例 1】从 1, 2，3，…, 10 中选出 3 个不同的数，使这三个数构成等差数列，则这样的数列共有多少个？(　　).

A. 20　　B. 26　　C. 28　　D. 40　　E. 42

【例 2】各数位的数字之和是 24 的三位数共有多少个？(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10　　E. 12

【例 3】从 1 到 300 的自然数中，完全不含有数字 3 的数有多少个?(　　).

A. 240　　B. 242　　C. 248　　D. 252　　E. 262

二、取样

1. 选取元素或位置，用组合 C_n^m .

2. 当样本元素多，需要的元素少，需要选取，即供大于求时需要选取

当供求相等时，只有一种选法

3. 相同元素

对于相同元素，无论选取几个，都只有一种选法.

4. 分类取样

这属于常考取样，比如样本分为男女两类，按科目或部门分类等，要分别从不同类别选取对应数量要求的元素.

【例 4】从 4 名男生和 5 名女生中任选 5 人参加数学课外小组，求在下列条件下各有多少种不同的选法?

(1) 选 2 名男生和 3 名女生，且女生甲必须入选；(　　).

A. 30　B. 32　C. 34　D. 36　E. 40

(2) 至多选 4 名女生，且男生甲和女生乙不同时入选．(　　)．

A. 90　B. 92　C. 104　D. 116　E. 120

【例 5】从 8 名男生，6 名女生中选出 6 人参加游泳比赛．在下列条件下，分别有多少种选法？(　　)．

(1)恰有 3 名女生入选；

(2)至少有两名女生入选；

(3)某两名女生，某两名男生必须入选；

(4)某两名女生，某两名男生不能同时入选；

【答案】(1) $C_6^3 \times C_8^3$ (2) $C_{14}^6 - C_8^6 - C_8^5 \times C_6^1$ (3) C_{10}^2 (4) $C_{14}^6 - C_{10}^2$

【例 6】在 6 名内科医生和 4 名外科医生中，内科主任和外科主任各一名，现要组成 5 人医疗小组送医下乡，按照下列条件各有多少种选派方法？

(1)有 3 名内科医生和 2 名外科医生；(　　)．

A. 120　B. 116　C. 108　D. 96　E. 92

(2)既有内科医生，又有外科医生；(　　)．

A. 240　B. 242　C. 246　D. 248　E. 250

(3)至少有一名主任参加；(　　)．

A. 182　B. 184　C. 188　D. 191　E. 196

【例 7】现有男同学 3 人，女同学 4 人(女同学中有一人叫王红)，从中选出男女同学各 2 人，分别参加数学、英语、音乐、美术四个兴趣小组：

(1) 其中参加美术小组的是女同学的选法有多少种？(　　)．

A. 214　B. 216　C. 228　D. 230　E. 232

(2)参加数学小组的不是女同学王红的选法有多少种?(　　)

A. 324　　B. 346　　C. 368　　D. 370　　E. 378

【例 8】某校举行男生乒乓球比赛，比赛分成 3 个阶段进行，第一阶段：将参加比赛的 48 名选手分成 8 个小组，每组 6 人，分别进行单循环赛；第二阶段：将 8 个小组产生的前 2 名共 16 人再分成 4 个小组，每组 4 人，分别进行单循环赛；第三阶段：由 4 个小组产生的 4 个第 1 名进行 2 场半决赛和 2 场决赛，确定 1 至 4 名的名次．问：整个赛程一共需要进行多少场比赛？(　　).

A. 120　　B. 128　　C. 130　　D. 140　　E. 148

三、排序

关键看选出的元素与顺序是否有关，若交换某两个元素的位置对结果产生影响，则是排列问题，而交换任意两个元素的位置对结果没有影响，则是组合问题.

【例 10】电视台连续播放 6 个广告，其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告，要求首尾必须播放公益广告，则共有(　　)种不同的播放方式.

A. 42　　B. 48　　C. 52　　D. 56　　E. 64

四、取排结合

1. 何时需要选取？

当样本元素较多，而需求的元素较少时，即供大于求时，需要选取. 当供求相等时，只有一种选法.

2. 何时需要排序

主要标志是：是否与元素的排列顺序有关，有顺序的是排列问题，无顺序的组合问题. 例如 123 和 321, 132 是不同的排列，但它们都是相同的组合. 再如两人互寄一次信是排列问题，互握一次手则是组合问题.

3. 两者同时出现时

在解决排列问题时，先取后排是一个常见的解题策略.

【例 11】5 个人全体排成一行，问下列情形各有多少种不同的排法：

(1)甲不在正中间也不在两端；(　　).

A. 40　　B. 42　　C. 44　　D. 48　　E. 64

(2)甲、乙两人必须排在两端；(　　).

A. 12　B. 14　C. 18　D. 20　E. 24

(3)甲、乙两人都不排在两端；(　).

A. 32　B. 36　C. 38　D. 40　E. 42

(4)甲在两端，乙不在正中间.

A. 30　B. 32　C. 34　D. 35　E. 36

五、分类与取排结合

对于一些比较复杂的综合题目，由于出现很多干扰因素，故需要先分类(有时某一大类里面又需要分为若干小类)，然后对每一类再分步，结合取排分析求解.

【例 12】从−3，−2，−1,0，1,2，3，4 八个数字中任取 3 个不同的数字作为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数 a、b、c 的取值，问共能组成多少个不同的二次函数？(　).

A. 280　B. 294　C. 296　D. 298　E. 304

六、反面思维法

对某些排列组合问题，当从正面入手情况复杂，不易解决时，可考虑从反面入手，将其等价转化为一个较简单的问题来处理.即采用先求总的排列数(或组合数)，再减去不符合要求的排列数(或组合数)，从而使问题获得解决的方法,其实它就是补集思想.

【例 13】现有 16 张不同的卡片，其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各 4 张，从中任取 3 张，要求这三张卡片不能是同一种颜色，且绿色卡片至多 1 张，不同的取法的种数为(　).

A. 484　B. 472　C. 252　D. 232　E. 230

第十章 概率初步

第一节 古典概率

一、基本定义

1. 随机试验

若试验满足条件：

(1) 试验可在相同条件下重复进行；

(2) 试验的结果具有很多可能性；

(3) 试验前不能确切知道会出现何种结果，只知道所有可能出现的结果.

这样的试验叫做随机试验，简称试验，记为E.

2. 随机事件

在一定条件下可能发生也可能不发生的事件；常记为A，B，C……

【注意】三种事件都是在“一定条件下”发生的，当条件改变时，事件的性质也可以发生变化.

3. 基本事件、必然事件、不可能事件

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件，基本事件也叫样本点.

样本空间包含所有样本点，在每次试验中总是要发生的，称为必然事件.

每次试验中一定不发生的事件，称为不可能事件，记为ϕ.

【注意】一次试验中可能出现的每一个结果(事件A)称为一个基本事件.

【例 1】下列事件：

①如果a、$b\in R$, 则$a+b=b+a$；

②“地球在转动”；

③明天泰安下雨；

④没有水分，黄豆能发芽；

其中是必然事件的有几个(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

【例 2】下列事件：

①a, $b\in R$ 且$a<b$, 则$a-b\in R$；

②小华将一石块抛出地球；

③掷一枚硬币，正面向上；

④掷一颗骰子出现点 8.

其中是不可能事件的有几个（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

【例 3】下列事件：

①口袋里有伍角、壹角、壹元的硬币若干枚，随机地摸出一枚是壹角；

②在标准大气压下，水在 90℃沸腾；

③射击运动员射击一次命中 10 环；

④同时掷两颗骰子，出现的点数之和不超过 12.

其中是随机事件的有几个（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 4

二、随机事件的概率

1. 概率的定义

随机事件 A 发生的可能性大小的度量值称为事件 A 的概率，记为 $P(A)$.

2. 概率的性质

性质 1 设有有限个两两互斥的事件 A_1，$A_2\cdots$，A_n，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$；

性质 2 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$

三、古典概型

1．古典概型

随机试验 E 具有以下两个特征：

(1)样本空间的元素(即基本事件)只有有限个；

(2)每个基本事件出现的可能性是相等的. 称 E 为古典概型试验.

2．计算公式

在古典概型的情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}K}{\text{样本空间中基本事件总数}n}$$

3. 理解

对于古典概率，需要用排列组合分别计算分子和分母的情况数，然后用比值表示发生的概率.

四、三类基本古典概率

1.取球或取样

【例 4】盒中有 4 只球，其中红球、黑球、白球各一只，另有一只红、黑、白三色球，现从中任取 2 球，其中恰有一球上有红色的概率为(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$　　E. $\frac{5}{6}$

【例 5】一只口袋中有 5 只同样大小的球，编号分别为 1，2，3，4，5，今从中随机抽取 3 只球，则取到的球中最大号码是 4 的概率为(　　).

A.0.3　　B.0.4　　C.0.5　　D.0.6　　E.0.7

【例 6】一个口袋内有 7 个白球和 3 个黑球，分别求下列事件的概率：

(1)事件 A：从中摸出一个放回后再摸一个，两回摸出的球是一白一黑；

(2)事件 B：从袋中摸出一个黑球，放回后再摸出一个是白球；

(3)事件 C：从袋中摸出两个球，一个黑球，一个白球；

(4)事件 D：从从袋中摸出两个球，先摸出的是黑球，后摸出的是白球.

叙述正确的有几个？（　　）.

①P(A)=0.42 ②P(B)=0.21 ③P(C)=0.35 ④P(D)=0.42

A.0　　B.1　　C.2　　D.3　　E.4

【例 7】某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成.现从中随机选出两位作为成果发布人，则此两人不属于同一个国家的概率为(　　).

A. $\frac{2}{9}$　　B. $\frac{17}{40}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{119}{190}$　　E. $\frac{37}{110}$

【例 8】某剧院正在上演一部新歌剧，前座票价为 50 元，中座票价为 35 元，后座票价为 20 元，如果购买到任何一种票是等可能的，现任意购买到 2 张票，则其值不超过 70 元的概率是(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$　　E. $\frac{1}{6}$

2.分房问题

【例 9】将 4 个编号的球放入 3 个编号的盒中，对于每一个盒来说，所放的球数 k 满足 0≤ k ≤ 4.在各种放法的可能性相等的条件下，求：(　　).

(1)第一个盒没有球的概率；

(2)第一个盒恰有 1 个球的概率；

(3)第一个盒恰有 2 个球的概率；

(4)第一个盒有 1 个球，第二个盒恰有 2 个球的概率.

A. $\frac{4}{27}$　B. $\frac{7}{27}$　C. $\frac{8}{27}$　D. $\frac{32}{81}$　E. $\frac{16}{81}$

【答案】(1)E　(2)D　(3)C　(4)A

【例 10】在房间里有 4 个人，问至少有两个人的生日是同一个月的概率是多少？(　　).

A. $\frac{17}{33}$　B. $\frac{8}{27}$　C. $\frac{57}{96}$　D. $\frac{55}{96}$　E. $\frac{41}{96}$

3. 数字问题

【例 11】一种编码由 6 位数字组成，其中每位数字可以是 0,1,2……，9 中的任意一个. 求编码的前两位数字都不超过 5 的概率(　　).

A. 0.36　B. 0.37　C. 0.38　D. 0.46　E. 0.39

【例 12】从 0,1，2,3 这四位数字中任取 3 个进行排列，组成无重复数字的三位数，求排成的三位数是偶数的概率.(　　).

A. $\frac{7}{36}$　B. $\frac{2}{9}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{5}{9}$　E. $\frac{11}{36}$

第二节 独立事件

一、独立事件概念

如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件发生或不发生的概率，则称这两事件是相互独立的.

二、数学定义

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称两事件 A 和 B 是相互独立的.

【评注】可将其理解为：相互独立事件同时发生的概率=每个发生的概率相乘.

三、常用结论

1. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n)$.

2. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件都不发生的概率，等于每个事件不发生的概率的积，$P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\cdots\cdot\overline{A_n})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_n})$.

3. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件至少有一个发生的概率，可以从其反面求解：等于每个事件发生的概率的积，$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_n})$.

四、做题核心

先分析每次或每个对象的成败情况，再对应写概率即可.

【例 1】设甲、乙两射手独立地射击同一目标，他们击中目标的概率分别为 0.9、0.8，求：

(1) 目标恰好被甲击中的概率；(　　).

A. 0.36　　B. 0.32　　C. 0.28　　D. 0.18　　E. 0.12

(2) 目标被击中的概率.(　　).

A. 0.98　　B. 0.97　　C. 0.92　　D. 0.96　　E. 0.86

【例 2】甲、乙、丙三台机床各自独立地加工同一种零件，已知甲机床加工的零件是一等品而乙机床加工的零件不是一等品的概率为$\frac{1}{4}$，乙机床加工的零件是一等品而丙机床加工的零件不是一等品的概率为$\frac{1}{12}$，甲、丙两台机床加工的零件都是一等品的概率为$\frac{2}{9}$. 从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验，求至少有一个一等品的概率.（　）.

A. $\frac{7}{36}$　B. $\frac{2}{9}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{5}{9}$　E. $\frac{5}{6}$

【例 3】某项考试按科目 A、科目 B 依次进行，只有当科目 A 成绩合格时，才可继续参加科目 B 的考试. 已知每个科目只允许有一次补考机会，两个科目成绩均合格方可获得证书. 现某人参加这项考试，科目 A 每次考试成绩合格的概率均为$\frac{2}{3}$，科目 B 每次考试成绩合格的概率均为$\frac{1}{2}$. 假设各次考试成绩合格与否均互不影响.

（Ⅰ）求他不需要补考就可获得证书的概率；（　）.

A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{2}{9}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{5}{9}$　E. $\frac{5}{6}$

（Ⅱ）求他能够获得证书的概率.（　）.

A. $\frac{7}{36}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{5}{9}$　E. $\frac{1}{2}$

第三节 伯努利公式

一、独立重复试验

在相同条件下，将某试验重复进行 n 次，且每次试验中任何一事件的概率不受其它次试验结果的影响，此种试验称为 n 次独立重复试验.

二、伯努利公式

如果在一次试验中某事件发生的概率是 p,那么在 n 次独立重复试验中这个事恰好发生 k 次的概率：$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},(k=0,1,2\cdots n)$，其中 q=1-p.

【特殊】

k=n 时,即在 n 次独立重复试验中事件 A 全部发生,概率为 $P_n^{(n)}=C_n^n p^n(1-p)^0=p^n$

k=0 时,即在 n 次独立重复试验中事件 A 没有发生,概率为 $P_n^{(0)}=C_n^0 p^0(1-p)^n=(1-p)^n$

【理解】n 次独立重复试验的特征：

①试验的次数不止一次，而是多次，次数 n≥1；

②每次试验的条件是一样的，是重复性的试验序列；

③每次试验的结果只有 A 与 $\overline{A}$ 两种(即事件 A 要么发生，要么不发生)，每次试验相互独立，试验的结果互不影响，即各次试验中发生的概率保持不变.

【例 1】掷一枚不均匀的硬币，正面朝上的概率为 2/3，若将此硬币掷 4 次，则正面朝上 3 次的概率是(　　).

A. $\frac{8}{81}$　　B. $\frac{8}{27}$　　C. $\frac{32}{81}$　　D. $\frac{1}{2}$　　E. $\frac{26}{27}$

【例 2】某单位 6 名员工借助互联网开展工作，每个员工上网的概率都是 0.5(相互独立).求(1)至少 3 人同时上网的概率；(　　).

A. $\frac{11}{64}$　　B. $\frac{17}{64}$　　C. $\frac{7}{32}$　　D. $\frac{19}{32}$　　E. $\frac{21}{32}$

(2)至少几人同时上网的概率小于 0.3？(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5　　E. 4 或 5

第十一章 数据描述

第一节 平均数

一、平均数

设 n 个数 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$，称 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的平均数.

二、众数

在一组数据中，出现次数最多的数据叫做这组数据的众数.

三、中位数

将一组数据按大小依次排列，把处在最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的中位数.

【例 1】某班有 50 个学生，在数学考试中，成绩是在前 10 名的学生的平均分比全班平均分高 12 分，那么其余同学的平均分比全班平均分低了多少分？(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6　　E. 7

【例 2】某项射击资格赛后的统计表明，某国四名运动员中，三名运动员的平均环数加上另一运动员的环数，计算后得到的环数分别为：92、114、138、160，则此国四名运动员资格赛的平均环数是：(　　).

A. 63　　B. 126　　C. 168　　D. 252　　E. 256

第二节 极差与方差

一、极差

1. 定义

极差＝最大值－最小值

2. 意义

极差是用来反映一组数据变化范围的大小．我们可以用一组数据中的最大值减去最小值所得的差来反映这组数据的变化范围，用这种方法得到的差就称为极差．

极差仅只表示一组数据变化范围的大小，只对极端值较为敏感，而不能表示其它更多的意义．

二、方差

1. 定义

方差公式：$S^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$

求一组数据的方差可以简记为：“先平均，再求差，然后平方，最后再平均．”

2. 意义

方差是反映一组数据的整体波动大小的指标，它是指一组数据中各数据与这组数据的平均数的差的平方的平均数，它反映的是一组数据偏离平均值的情况．

三、标准差

1. 定义

在计算方差的过程中，可以看出方差的数量单位与原数据的不一致，因而在实际应用时常常将求出的方差再开平方，这就是标准差．

标准差 $s=\sqrt{s^2}$

2. 意义

方差和标准差都是用来描述一组数据波动情况的特征数，常用来比较两组数据的波动大小．方差较大的波动较大，方差较小的波动较小，方差的单位是原数据的单位平方，标准差的单位与原数据的单位相同．在解决实际问题时，常用样本的方差来估计总体方差方法去考察总体的波动情况．

【例 1】关于方差，下列说法正确的是（　　）．

A. 方差表示平均水平

B. 方差表示极差大小

C. 方差表示数据的波动大小

D. 方差不可能等于标准差

E.方差有可能为负值

【例 2】一个样本的方差是 0，若中位数是 6，那么它的平均数是(　　).

A.6　　B.5　　C.7　　D.8　　E.无法确定

【例 3】如果给数组中每一个数都减去同一非零常数，则数据的(　　).

A.平均数改变，方差不变

B.平均数改变，方差改变

C.平均数不变，方差不变

D.平均数不变，方差改变

E.无法确定

【例 4】已知样本数据 n，n+1，n+2，n+3，n+4，则这个样本的标准差是(　　).

A.0　　B.1　　C.$\sqrt{2}$　　D.3　　E.2

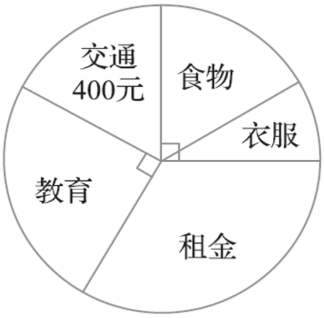
第三节 常见图表

一、饼图

饼图是一个划分为几个扇形的圆形统计图表，用于描述量、频率或百分比之间的相对关系.在饼图中，每个扇区的弧长(以及圆心角和面积)大小为其所表示的数量的比例.这些扇区合在一起刚好是一个完全的圆形.顾名思义，这些扇区拼成了一个切开的饼形图案.其所用公式为：某部分所占的百分比等于对应扇形所占整个圆周的比例.

扇形统计图的特点和作用:通过扇形的大小来反映各个部分占总体的百分之几.

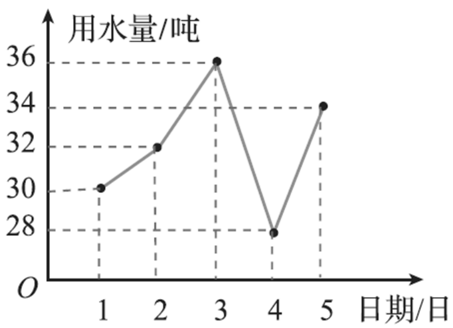
【例 1】如图的统计图是王老师某月的消费情况．已知王老师在食物和交通方面的花费一样多，衣服的花费是食物的一半，她在租金上的花费是(　　).



A.400 元　　B.　600 元　　C.800 元　　D.1200 元　　E.1300 元

二、折线图

【例 2】某小区六月份 1 日至 5 日每天用水量变化情况如图所示．那么这 5 天平均每天的用水量是(　　).



A.30 吨　　B.31 吨　　C.32 吨　　D.33 吨　　E.35 吨

三、直方图

1. 定义：把数据分为若干个小组，每组的组距保持一致，并在直角坐标系的横轴上标出每组的位置(以组距作为底)，计算每组所包含的数据个数(频数)，以该组的“频率/组距”为高作矩形，这样得出若干个矩形构成的图叫做直方图.

2. 定义所包含的要点：

(1)组距的确定：一般是人为确定，不能太大也不能太小.

(2)组数的确定：组数=极差/组距.

(3)每组频率的确定：频率=频数/数据容量.

(4)每组所确定的矩形的面积=组距×$\frac{频率}{组距}$=频率.

(5)频率直方图下的总面积等于1(各个矩形面积之和=1)

(6)分组时要遵循“不重不漏”的原则：“不重”是指某一个数据只能分在其中的某一组，不能在其他组中出现；“不漏”是指组别能够穷尽，即在所分的全部组别中每项数据都能分在其中的某一组，不能遗漏.

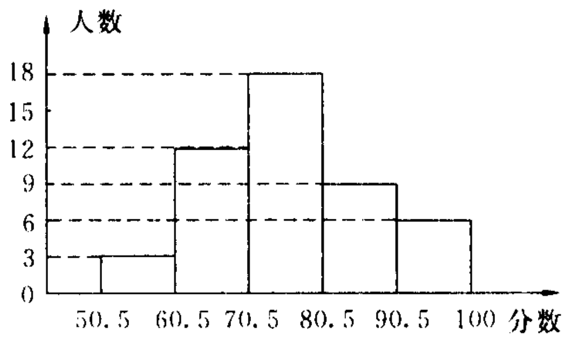
【注意】为了解决上述问题，分组时采用左闭右开的区间表示：[　　).

例如某数据分组时，其中的两组分别为[227,290)和[290,353)，这样290这个数据就只存在于第二个区间中了，避免290同时属于两个区间的情况发生.

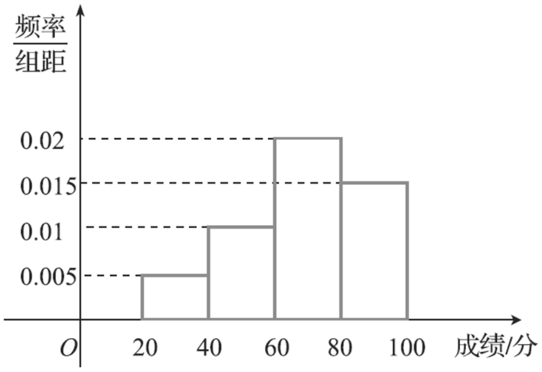
3．在直方图中，众数是最高矩形底边中点的横坐标；中位数左边和右边的直方图的面积相等；平均数是直方图的重心，它等于每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点横坐标之和.

【例3】某班学生参加知识竞赛，将竞赛所取得的成绩(得分取整数)进行整理后分成5组，并绘制成直方图，如下图所示，请结合直方图提供的信息，60.5～70.5这一分数段的频率分别是多少？(　).

A. 0.2　　B. 0.25　　C. 0.3　　D. 0.35　　E. 0.4



【例4】某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，



数据的分组依次为$[20,40),[40,60),[60,80),[80,100)$.若低于 60 分的人数是 15 人，则该班的学生人数是(　　).

A. 45　　B. 50　　C. 55　　D. 60　　E. 70