高途 | 高途考研

2025

第六章

——三角形、四边形、圆

讲师 陈剑

下载App 关注公众号

陈剑老师简介

- 清华大学博士，**考试大纲解析人**，标准化辅导体系首创人。
- 自02年从事考试辅导**22年**以来，对**考点**、**重点**、**难点**全面、深刻、透彻的把握，特别是必考点的把握出神入化。
- 其编写的**《数学高分指南》**、**《讲真题》**、**《数学1000题》**已成为业内传播的经典。
- 所带领的黄金教学团队，更是以无与伦比的连续性、系统性和考生的大面积高分而受到广大莘莘学子的爱戴！

教学目标

1.掌握三角形三边关系及应用

2.掌握三角形面积计算公式

3.了解常见四边形与多边形

4.掌握圆及扇形的计算公式

三角形

考向 2 三边关系

思 路 根据三角形三边的关系来分析三角形的要求，任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，只要满足其中一个就可以构成三角形．

[例 8] 有长度分别为 1，2，3，4，5，6，7 的七根木棒，任取三根，可以组成(　　)个三角形.

(A) 13　(B) 14　(C) 15　(D) 16　(E) 17

[例 11] $\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$AC=3$，当$\angle A$ 在（0，π）中变化时，该三角形 BC 边上的中线长取值的范围是（　　）.

（A）（0，5）　（B）（1，4）　（C）（3，4）　（D）（2，5）　（E）（3，5）

考点6-02-02 三角形面积

一、考点讲解

1. 基本面积公式

（1） $S=\frac{1}{2}ah$，其中 h 是 a 边上的高.

应用 当已知底和高时，可以用此公式求面积.

（2） $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，其中 C 是 a，b 边所夹的角.

C	30°或 150°	45°或 135°	60°或 120°	90°
$\sin C$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

应用 当已知两边和夹角时，可以用此公式求面积.

（3） $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

应用 当已知三角形的三边时，可以用此公式求面积.

三、命题方向

考向 1　利用底高关系计算面积

思　路　当两个三角形等高时，面积之比等于底之比；当两个三角形同底时，面积之比等于高之比；当两个三角形同底等高时，面积相等．

[例 13] 如图 6－14，已知 $CD=5$，$DE=7$，$EF=15$，$FG=6$，线段 AB 将图形分成两部分，左边部分面积是 38，右边部分面积是 65，那么三角形 ADG 的面积是(　　).

(A) 40　(B) 35　(C) 33

(D) 32　(E) 31

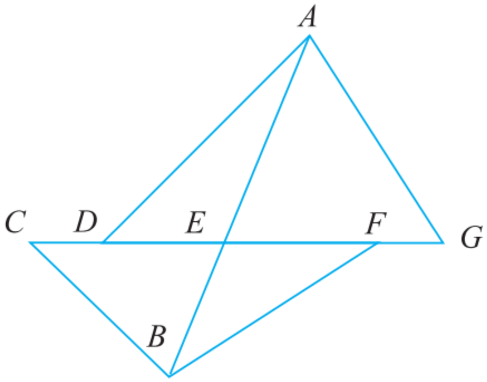

图 6－14

考向 2 **利用夹角求面积**

思 路 已知三角形两边及夹角，可以套公式求面积：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$. 要记住常用角度的三角函数值.

[例 14] 若三角形有两边长为 4 与 6，三角形的面积为 $6\sqrt{2}$，则这两边的夹角为(　　).

(A) 30°　　(B) 45°或 135°　　(C) 60°或 120°

(D) 75°　　(E) 90°

效果检测

[例 15] 如果三角形有两边长为 4 和 6，第三边长度在变化，则三角形面积的最大值为(　　).

(A) 18　(B) 16　(C) 14　(D) 12　(E) 10

考向 3　利用三边计算面积

思　路　当已知三角形的三条边时，可以套公式求面积：$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

[例 16] 若三角形的三边长为 7，8，9，则三角形的面积为（　　）.

（A）$16\sqrt{2}$　（B）$12\sqrt{3}$　（C）$18\sqrt{3}$　（D）$12\sqrt{5}$　（E）$18\sqrt{5}$

【例】周长为24的三角形面积最大为多少?

3. 鸟头定理

两个三角形中有一个角相等或互补，这两个三角形叫作共角三角形．

共角三角形的面积比等于对应角（相等角或互补角）两夹边的乘积之比．

如图 6－11，在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中，$\angle A$ 的正弦值相同，所以 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADE}=(AB\cdot AC):(AD\cdot AE)$.

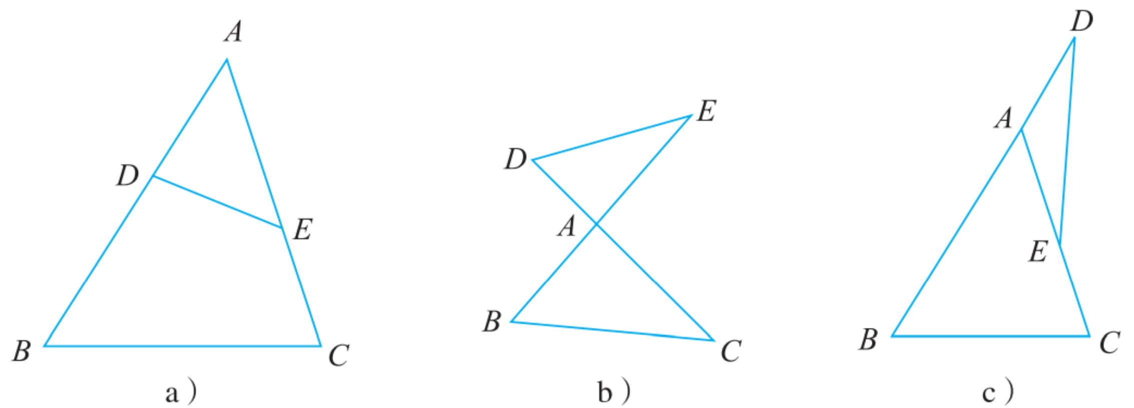

图 6－11

考向 4　利用鸟头定理计算面积

思　路　如果出现共角或等角的三角形，可以利用鸟头定理求解：共角三角形的面积比等于对应角（相等角或互补角）两夹边的乘积之比.

[例 18] 如图 6 - 16，在 $\triangle ABC$ 中，D 在 BA 的延长线上，E 在 AC 上，且 $AB:AD=5:2$，$AE:EC=3:2$，$S_{\triangle ADE}=12$，则 $\triangle ABC$ 的面积是（　　）.

（A）30　（B）35　（C）43　（D）48　（E）50

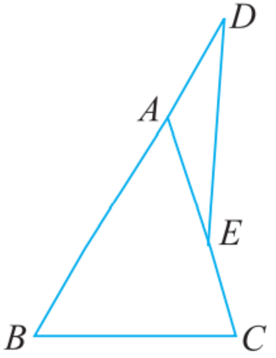

图 6 - 16

考向 5 **利用燕尾定理计算面积**

思 路 如果出现三角形内一点与各顶点的连线，则采用燕尾定理分析．

4. 燕尾定理

如图 6－12，在三角形 ABC 中，AD，BE，CF 相交于同一点 O，那么 $S_{\triangle ABO}:S_{\triangle ACO}=BD:DC$.

上述定理给出了一个新的转化面积比与线段比的手段，因为 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACO$ 的形状很像燕子的尾巴，所以这个定理被称为燕尾定理．该定理在许多几何题目中都有着广泛的运用，它的特殊性在于，它可以存在于任何一个三角形之中，为三角形中的三角形面积对应底边之间提供互相联系的途径．

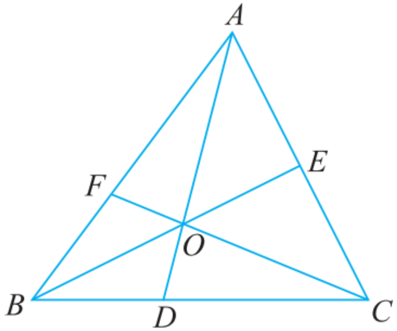

图 6－12

评注 推导过程：因为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 等高，

故 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=BD:CD$，因为 $\triangle BOD$ 与 $\triangle COD$ 也等高，

故 $S_{\triangle BOD}:S_{\triangle COD}=BD:CD$，从而有 $(S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BOD}):(S_{\triangle ACD}-S_{\triangle COD})=BD:CD$，

即 $S_{\triangle ABO}:S_{\triangle ACO}=BD:DC$.

[例 19] 如图 6－17，三角形 ABC 中，$BD:DC=4:9$，$CE:EA=4:3$，则 $AF:FB=$（　　）.

（A）27:17　（B）27:14　（C）25:16
（D）28:15　（E）27:16

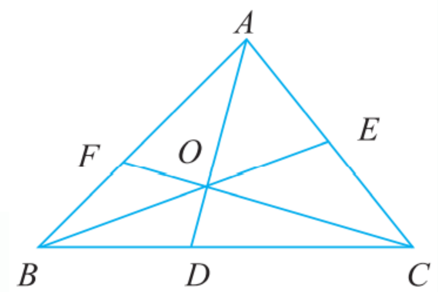

图 6－17

考点 6-02-04 全等与相似

一、考点讲解

1. 三角形的全等

(1) 定义

两个三角形形状相同，大小相同，则称两者全等.

(2) 判别

可以通过边边边（SSS），边角边（SAS），角边角（ASA），角角边（AAS）来判断.

(3) 性质

如果两个三角形全等，则对应边、对应角、面积均相等. 用数学语言表达就是两个三角形等价，这样的两个三角形具有相同的边长、角、面积等.

(4) 应用

当出现折叠、对称、旋转时，可以用全等分析.

2. 三角形的相似

(1) 定义

两个三角形形状相同，大小成比例，则称两者相似．

(2) 判断

只要有两组内角对应相等即可．

(3) 性质

①相似三角形（相似图形）对应边的比相等（即为相似比），$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$.

②相似三角形（相似图形）的高、中线、角平分线的比也等于相似比．

③相似三角形（相似图形）的周长比等于相似比，即$\frac{C_1}{C_2}=k$.

④相似三角形（相似图形）的面积比等于相似比的平方，即$\frac{S_1}{S_2}=k^2$.

(4) 应用

出现平行时，要用相似分析.

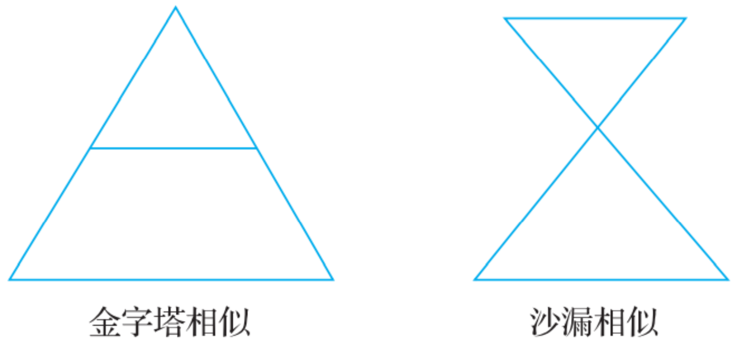

图 6－18

评 注 相似三角形的性质完全可以延伸到其他的相似图形，如四边形等.

三、命题方向

考向 1 **三角形全等**

思　路　遇到折叠、对称或翻转时，采用全等分析．

[例 24] 直角三角形 ABC 的斜边 $AB=13$，直角边 $AC=5$，把 AC 对折到 AB 上与斜边相重合，点 C 与点 E 重合，折痕为 AD（如图 6－20），则图中阴影部分的面积为（　　）.

(A) 20　　(B) $\frac{40}{3}$　　(C) $\frac{38}{3}$　　(D) 14　　(E) 12

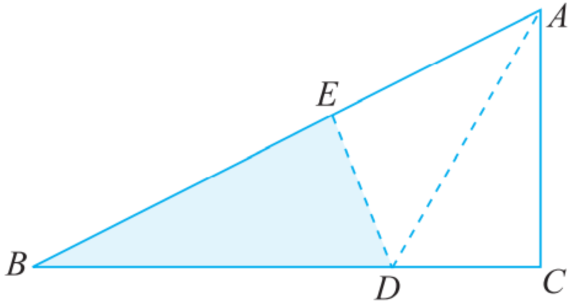

图 6－20

考向 2 三角形相似

思 路 当出现平行时，采用相似分析．对于相似图形，面积比等于相似比的平方．

[例 26] 如图 6－21，$\triangle ABC$ 中，DE，FG，BC 互相平行，$AD=DF=FB$，则 $S_{\triangle ADE}:S_{\text{四边形}DEGF}:S_{\text{四边形}FGCB}=$（　　）.

（A）1:3:5　（B）1:2:5　（C）1:3:4　（D）1:3:6　（E）2:3:5

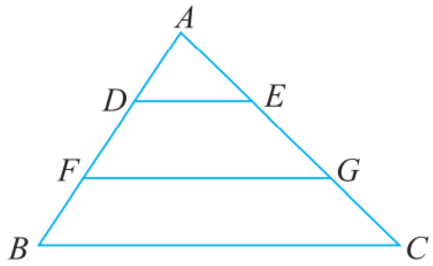

图 6－21

四边形

6. 蝶形定理

蝶形定理为我们提供了解决不规则四边形的面积问题的一个途径．通过构造模型，一方面可以使不规则四边形的面积关系与四边形内的三角形相联系；另一方面，也可以得到与面积对应的对角线的比例关系．

（1）任意四边形中的比例关系（“蝶形定理”，如图 6－23）：

① $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}=\frac{OD}{OB}$（根据等高三角形面积之比等于底之比），从而 $S_1\times S_3=S_2\times S_4$.

② 根据等比定理，$\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}=\frac{OD}{OB}=\frac{S_1+S_4}{S_2+S_3}$.

同理：$\frac{S_1+S_2}{S_4+S_3}=\frac{AO}{OC}$

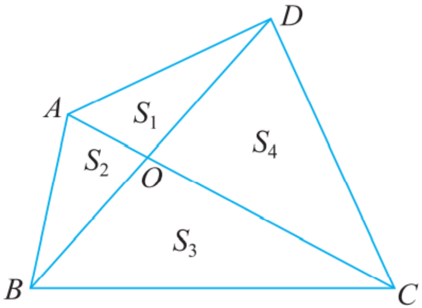

图 6－23

(2) 梯形的蝶形定理及相似比例（如图 6－24）

① $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_4}{S_3}=\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{a}{b}$.

② $S_1\times S_3=S_2\times S_4$.

③ $\dfrac{S_1}{S_3}=\dfrac{a^2}{b^2}$（相似）.

④ $S_2+S_3=S_4+S_3\Rightarrow S_2=S_4$.

综合以上四个，统一比例得到：$S_1:S_3:S_2:S_4=a^2:b^2:ab:ab$.

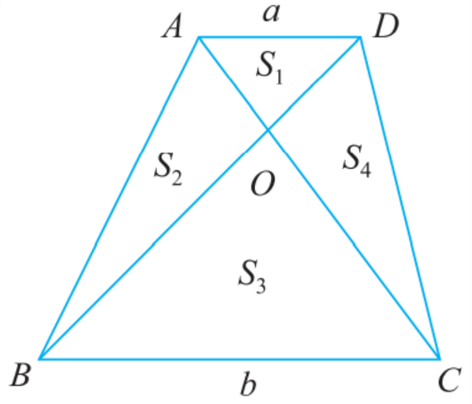

图 6－24

三、命题方向

考向 1　正方形

思　路　四边边长均为 a，四个内角都是 $90°$，面积为 $S=a^2$，周长为 $C=4a$.

[例 29] 如图 6－26，一个周长为 20 的正方形内接于一个周长为 28 的正方形，小正方形的一个顶点与大正方形的一个顶点的最大距离为（　　）.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）$\sqrt{58}$　　（E）$\sqrt{65}$

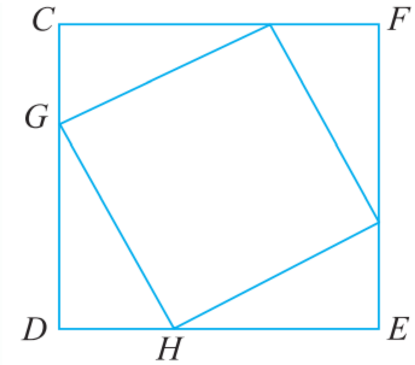

图 6－26

考向 2　长方形

思　路　长方形两组对边互相垂直，对角线互相平分. 注意矩形中出现直线将其分割为若干三角形的命题.

[例 32] 如图 6－29，在矩形 $ABCD$ 中，点 E，F，G，H 分别在 AB，BC，CD，DA 上，点 P 在矩形 $ABCD$ 内，若 $AB=4$，$BC=6$，$AE=CG=3$，$BF=DH=4$，四边形 $AEPH$ 的面积为 5，则四边形 $PFCG$ 的面积为(　　).

(A) 5　(B) 6　(C) 8　(D) 9　(E) 10

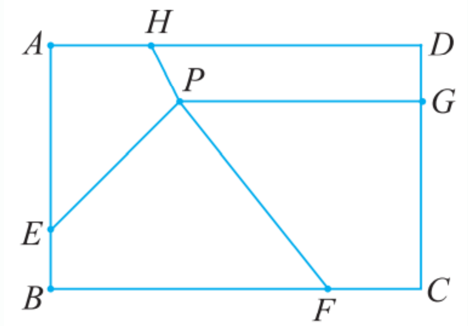

图 6－29

考向 3　菱形

思　路　菱形两对角线互相垂直平分，面积等于对角线之积的一半．

[例 36] 如图 6－30，在菱形 $ABCD$ 中，两条对角线长分别是 6 和 8，点 P 是 AC 上一动点，M，N 分别是 AB，BC 的中点，则 $PM+PN$ 的最小值为(　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5

(D) 6　　(E) 7

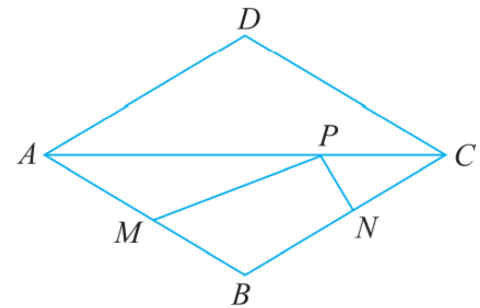

图 6－30

考向 6 **其他四边形**

思　路　遇到其他四边形，可以分割为三角形来求解，或者利用特殊四边形分析.

[例 40] 如图 6－34，已知 $ABCD$ 是平行四边形，$BC:CE=3:2$，三角形 ODE 的面积为 6. 则阴影部分的面积是(　　).

(A) 20　　(B) 21　　(C) 22　　(D) 24　　(E) 26

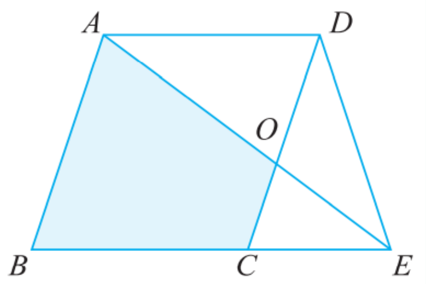

图 6－34

效果检测

[例 41] 如图 6－35，长方形 $ABCD$ 被 CE，DF 分成四块，已知其中 3 块的面积分别为 2、5、8，那么余下的四边形 $OFBC$ 的面积为(　　).

(A) 10　　(B) 9　　(C) 8　　(D) 7　　(E) 6

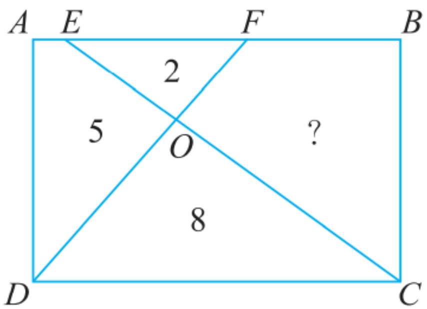

图 6－35

圆与扇形

一、考点讲解

1. 角的弧度

把圆弧长度和半径的比值称为一个圆周角的弧度.

度与弧度的换算关系：1 弧度 $=\frac{180^{\circ}}{\pi}$，$1^{\circ}=\frac{\pi}{180}$弧度.

常用的角度与弧度对应关系：

角度	30°	45°	60°	90°	180°	360°
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

2. 圆

圆的圆心为 O，半径为 r，直径为 d，则

周长 $C=2\pi r=\pi d$，面积 $S=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$.

3. 扇形

（1）扇形弧长

$l=r\theta=\frac{\alpha}{360}\times 2\pi r$，其中 θ 为扇形角的弧度数，α 为扇形角的角度，r 为扇形半径．

（2）扇形面积

$S=\frac{\alpha}{360^{\circ}}\times \pi r^{2}=\frac{1}{2}lr$，其中 α 为扇形角的角度，r 为扇形半径．

三、命题方向

考向 1　求弧长

思　路　先求圆心角，再根据半径求弧长.

[例 17] 把半径分别为 3 和 2 的两个半圆放成如图 6 - 39 的位置，则阴影部分的周长是(　　).

(A) $5\pi+7$　(B) $5\pi+6$　(C) $5\pi+4$

(D) $6\pi+5$　(E) $6\pi+3$

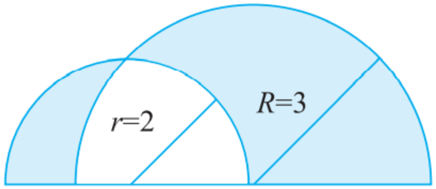

图 6 - 39

效果检测

[例 18] 如图 6－40，有四根底面半径都是 0.5 米的圆形管子，被一根铁丝紧紧地捆在一起，则铁丝的长度为(　　).（打结处的铁丝长度不计）

(A) $2\pi-2$　(B) $2\pi+6$　(C) $\pi+4$　(D) $\pi+5$　(E) $2\pi+3$

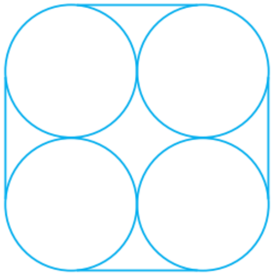

图 6－40

考向 2 求面积

思　路 对于面积，一般用割补法、反面减法、对称法等思路求解.

[例 21] 如图 6 − 43，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 10，若以 A 为圆心，10 为半径作扇形 ABD，在扇形 ABD 内作⊙O 与 AD、AB、弧都相切，则⊙O 的面积为(　　).

(A) $100(3-\sqrt{2})\pi$　　(B) $100(2-\sqrt{2})\pi$　　(C) $100(3-2\sqrt{2})\pi$

(D) $100(3+2\sqrt{2})\pi$　　(E) $100(3+\sqrt{2})\pi$

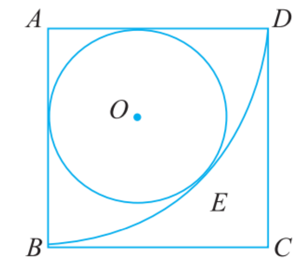

图 6 − 43

效果检测

[例 22] 如图 6 - 44，长方形 $ABCD$ 中的 $AB=10$，$BC=5$，以 AB 和 AD 分别为半径作$\frac{1}{4}$圆，则图中阴影部分的面积为(　　).

(A) $25-\frac{25}{2}\pi$　　(B) $25+\frac{125}{2}\pi$

(C) $50+\frac{25}{4}\pi$　　(D) $\frac{125}{4}\pi-50$

(E) $25+\frac{25}{2}\pi$

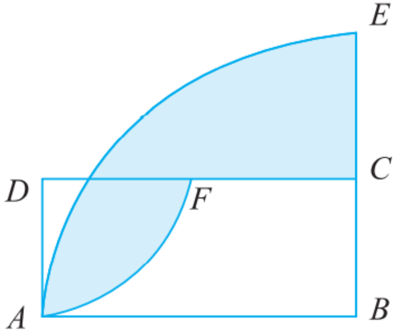

图 6 - 44

效果检测

[例 24] 如图 6 - 46，两个同心圆被两条半径截得的$\overset{\frown}{AB}=10\pi$，$\overset{\frown}{CD}=6\pi$，又 $AC=12$，则阴影部分面积为(　　).

(A) 66π　(B) 86π　(C) 96π　(D) 98π　(E) 102π

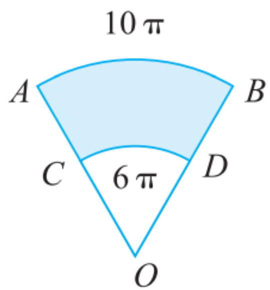

图 6 - 46

课程总结

1.三角形三边关系及应用

2.常见图形的面积计算方法

3.四边形与梯形的蝶形定理

4.圆及扇形的面积计算方法

不轻言放弃，天道酬勤

刻苦拼搏，书写辉煌！

高途考研

THANKS

- 期待下次相遇 -

下载App　　关注公众号